

# Analysis I

Prof. Dr. Ekaterina Kostina

WS 2019/20

# Inhaltsverzeichnis

|                                                                                               |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1 Grundlagen</b>                                                                           | <b>2</b>  |
| 1.1 Mengen und Aussagen . . . . .                                                             | 2         |
| 1.2 Wahrheitstabellen . . . . .                                                               | 2         |
| 1.3 Abbildungen . . . . .                                                                     | 3         |
| 1.4 Vollständige Induktion . . . . .                                                          | 5         |
| 1.5 Elemente der Kombinatorik . . . . .                                                       | 6         |
| 1.6 Grundlegendes über Zahlenmengen . . . . .                                                 | 8         |
| 1.7 Was ist ein Körper? . . . . .                                                             | 9         |
| <b>2 Die Reellen Zahlen</b>                                                                   | <b>11</b> |
| 2.1 Von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen . . . . .                                 | 11        |
| 2.1.1 Zusammenfassung . . . . .                                                               | 16        |
| 2.2 Der Körper $\mathbb{R}$ . . . . .                                                         | 17        |
| 2.3 Wichtige Aussage . . . . .                                                                | 20        |
| 2.4 Weitere Möglichkeiten, die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zu charakterisieren . . . . . | 20        |
| 2.5 Mächtigkeit von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ . . . . .                                   | 23        |
| 2.6 Die Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ . . . . .                                               | 24        |
| <b>3 Folgen und Reihen</b>                                                                    | <b>27</b> |
| 3.1 Folgen . . . . .                                                                          | 27        |
| 3.2 Konvergenz in $\mathbb{C}$ . . . . .                                                      | 32        |
| 3.3 Unendliche Summe („Reihen“) . . . . .                                                     | 32        |
| 3.3.1 Konvergenzkriterien . . . . .                                                           | 33        |
| 3.4 Umordnen von Reihen . . . . .                                                             | 37        |
| 3.5 Das Cauchy-Produkt von Reihen . . . . .                                                   | 38        |
| 3.6 Potenzreihen . . . . .                                                                    | 39        |
| <b>4 Funktionen und Stetigkeit</b>                                                            | <b>39</b> |
| 4.1 Grenzwerte bei Funktionen . . . . .                                                       | 40        |
| 4.2 Stetigkeit . . . . .                                                                      | 42        |

# 1 Grundlagen

## 1.1 Mengen und Aussagen

**Definition 1.1.** Seien  $A$  und  $B$  Mengen.

- **Teilmenge**  $B \subset A$  bedeutet: jedes Element von  $B$  ist auch Element von  $A$   
 $B$  ist eine Teilmenge von  $A$ ; bsp.:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- **Mengengleichheit** Zwei Mengen  $A$  und  $B$  sind gleich, wenn  $A \subset B$  und  $B \subset A$ .
- **Strikte Teilmenge**  $B$  ist eine strikte Teilmenge von  $A$ , wenn es ein Element  $a \in A$  gibt, mit  $a \notin B$ .
- **Leere Menge** oder Nullmenge " $\emptyset$ " enthält keine Elemente.  
 Es gilt konventionsgemäß  $\emptyset \in A$  für alle Mengen  $A$
- **Vereinigung** von  $A$  und  $B$ :  $A \cup B := \{ a \mid a \in A \text{ oder } a \in B \}$
- **Durchschnitt** von  $A$  und  $B$ :  $A \cap B := \{ a \mid a \in A \text{ und } a \in B \}$
- **Differenz** von  $A$  und  $B$ :  $A \setminus B := \{ a \mid a \in A \text{ und } a \notin B \}$
- **Produktmenge**:  $A \times B := \{ (a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B \}$
- **Disjunkte Mengen**  $A$  und  $B$  sind disjunkt, falls gilt:  $A \cap B = \emptyset$

**Bemerkung 1.2.** Das ODER im mathematischen Sinne bedeutet das einschließliche oder und nicht das entweder oder.

## 1.2 Wahrheitstabellen

**Definition 1.3.** Seien  $V$  und  $E$  Aussagen.

Eine Aussage ist ein Satz, von dem eindeutig feststeht, ob er wahr oder falsch ist.

- **UND und ODER** Man definiere die Verknüpfungen UND  $\wedge$  und ODER  $\vee$  wie folgt:

| $V$ | $E$ | $V \text{ und } E$ | $V \text{ oder } E$ |
|-----|-----|--------------------|---------------------|
| w   | w   | w                  | w                   |
| w   | f   | f                  | w                   |
| f   | w   | f                  | w                   |
| f   | f   | f                  | f                   |

- **Negation** Man definiere die NICHT-Verknüpfung wie folgt:

| $V$ | $\neg V$ |
|-----|----------|
| w   | f        |
| f   | w        |

- **Implikation** Wenn  $V$  gilt, gilt auch  $E$ . Man sagt:  $V$  ist hinreichende Bedingung für  $E$ , oder die Voraussetzungen von  $V$  sind hinreichend für die Gültigkeit von  $E$ . Die Gültigkeit von  $E$  ist notwendig für die Gültigkeit von  $V$ , oder die Ungültigkeit von  $E$  impliziert die Ungültigkeit von  $V$ . Es gilt:  $V \implies E$  ist wahr, falls  $\neg V$  oder  $E$  wahr ist.

| $V$ | $E$ | $V \implies E$ |
|-----|-----|----------------|
| w   | w   | w              |
| w   | f   | f              |
| f   | w   | w              |
| f   | f   | w              |

- **Äquivalenz** Man definiere die Äquivalenzrelation  $V \Leftrightarrow E$  als:  
 $V \Leftrightarrow E$  steht für  $V \implies E$  und  $E \implies V$ .

| $V$ | $E$ | $V \Leftrightarrow E$ |
|-----|-----|-----------------------|
| w   | w   | w                     |
| w   | f   | f                     |
| f   | w   | f                     |
| f   | f   | w                     |

**Definition 1.4** (Quantoren). Man definiere folgende Quantoren:

- $\forall$  Allquantor, also als: für alle.
- $\exists$  Existenzquantor, also als: es existiert ein.
- $\exists!$  als: es existiert genau ein a.

**Bemerkung 1.5.** Häufig hilft es Aussagen zu negieren. Hierbei gelten folgende Regeln (können mit Hilfe von WT gezeigt werden):

- $\neg(\forall a \in A : V(a)) \Leftrightarrow (\exists a \in A : \neg V(a))$
- $\neg(\exists a \in A : V(a)) \Leftrightarrow (\forall a \in A : \neg V(a))$

**Bemerkung 1.6** (Kontraposition). Zwei weitere Hilfsmittel:

- $(V \Rightarrow E) \Leftrightarrow (\neg E \Rightarrow \neg V)$
- $(V \Leftarrow E) \Leftrightarrow (\neg E \Leftarrow \neg V)$

**Bemerkung 1.7.** Zu Quantoren:

- Quantoren müssen immer angegeben werden.
- Die Reihenfolge der Quantoren ist essentiell.  
Bsp.:  $T :=$  Menge aller Töpfe,  $D :=$  Menge aller Deckel,  $V(a, b) =$  Deckel  $b$  passt auf Topf  $a$ .  
 $\forall a \in T : \exists b \in D : V(a, b)$  ist vermutlich wahr,  
 $\exists b \in D : \forall a \in T : V(a, b)$  ist vermutlich falsch.

### 1.3 Abbildungen

**Definition 1.8** (Abbildungen). Seien  $A, B$  Mengen. Eine Abbildung  $f$  zwischen  $A$  und  $B$   $f : A \rightarrow B$  ist eine Vorschrift, die jedem Element  $a \in A$  genau ein Element  $b \in B$  zugeordnet. Hierbei nenne man  $A$  Definitionsmenge von  $f$  und  $B$  Wertemenge von  $f$ .

**Definition 1.9** (Folgen). Zahlenfolgen sind Abbildungen  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Schreibweise: statt  $a(n)$  wird  $a_n$  und statt  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  wird  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  geschrieben.

**Definition 1.10** (injektiv, surjektiv, bijektiv). Es sei  $f : A \rightarrow B$  eine Abbildung.

- Abbildung  $f$  heißt injektiv, wenn gilt:

$$\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2.$$

- Abbildung  $f$  heißt surjektiv wenn gilt:

$$\forall b \in B : \exists a \in A : b = f(a).$$

- Abbildung  $f$  heißt bijektiv, wenn  $f$  injektiv und surjektiv ist.

**Beispiel 1.11.** Es sei  $f$  eine Abbildung:  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ . Dann ist  $f$  weder injektiv, noch surjektiv.

Jedoch ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], x \mapsto \sin(x)$  surjektiv, aber nicht injektiv.

Und  $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1], x \mapsto \sin(x)$  ist injektiv und surjektiv, also bijektiv.

**Definition 1.12** (Bild). Das Bild von  $A_1$  (unter  $f$ ):

$$f(A_1) := \{f(a) \mid a \in A_1\} = \{b \in B \mid \exists a \in A_1 : b = f(a)\}$$

**Definition 1.13** (Urbild). Das Urbild von  $B_1$  (unter  $f$ ):

$$f^{-1}(B_1) := \{a \mid f(a) \in B_1\} \subset A$$

**Definition 1.14** (Inverse). Zu einer bijektiven Abbildung existiert eine sogenannte Umkehrabbildung, auch Inverse, die ebenfalls bijektiv ist:

$$f^{-1} : B \rightarrow A \text{ mit } a = f^{-1}(b) :\Leftrightarrow b = f(a)$$

**Bemerkung 1.15.** Nur bijektive Abbildung besitzen Inverse.

Die Notation  $f^{-1}(B)$  hat zwei Bedeutungen:

- Urbild von  $B$  unter  $f$
- Bild von  $B$  unter  $f^{-1}$

Das Urbild ist also für beliebige Abbildungen definiert

**Definition 1.16** (Komposition von Abbildungen). Es sein  $f : A \rightarrow B$  und  $g : B \rightarrow C$  Abbildungen. Dann sei:

$$g \circ f : A \rightarrow C, (g \circ f)(a) := g(f(a))$$

Man sagt:  $g \circ f$  heißt  $g$  komponiert  $f$ .

**Definition 1.17** (Morphismen). Seien  $A$  und  $B$  Mengen mit einer gewissen Operation  $\oplus_A$  bzw.  $\oplus_B$ , z.B. Addition, Multiplikation.

Die Abbildung  $f : A \rightarrow B$  heißt homomorph (strukturhaltend), wenn gilt:

$$\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1 \oplus_A a_2) = f(a_1) \oplus_B f(a_2)$$

Ein bijektiver Homomorphismus heißt Isomorphismus.

**Definition 1.18** (Äquivalenzrelation). Äquivalenzrelation auf eine Menge  $A$  ist eine Beziehung  $a \sim b$  zwischen Elementen von  $A$  mit Eigenschaften

- $R_1$  (Relation) für  $\forall a, b \in A$  gilt entweder  $a \sim b$  oder  $a \not\sim b$
- $R_2$  (Reflexivität)  $a \sim a$
- $R_3$  (Symmetrie)  $a \sim b \implies b \sim a$
- $R_4$  (Transitivität)  $a \sim b$  und  $b \sim c \implies a \sim c$

**Definition 1.19** (Äquivalenzklasse).  $[a] := \{b \in A \mid b \sim a\}$   
 $a$  heißt Repräsentant der Äquivalenzklasse  $[a]$ .

**Beispiel 1.20.**  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 

Man definiere folgende Äquivalenzrelation:

$$(n, m) \sim (n', m') : \Leftrightarrow n + m' = n' + m \Leftrightarrow n - m = n' - m'$$

$R_1$  und  $R_2$  sind offenbar erfüllt.

$$R_3 \quad n + m' = n' + m \implies (n', m') \sim (n, m)$$

$R_4 \quad (n, m) \sim (n', m')$  und  $(n', m') \sim (n'', m'')$  gilt:

$$(n' + m') + m'' = (n' + m) + m'' = (n' + m'') + m = (m' + n'') + m \\ \implies n + m'' = n'' + m \implies (n, m) \sim (n'', m'')$$

Die zugehörigen Äquivalenzklassen bestehen aus allen Paaren natürlicher Zahlen mit gleicher Differenz.

**1.4 Vollständige Induktion**

**Beispiel 1.21.** Betrachte die Summe der ersten  $n$  natürlichen Zahlen. Es gilt:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

*Beweis.* Induktionsanfang für  $n = 1$ :

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+2)}{2} = 1.$$

Induktionsschritt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

□

**Definition 1.22.** Seien  $m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$

$a_m, a_{m+1}, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Dann  $a_m + a_{m+1} + \dots + a_n = \sum_{k=m}^n a_k$ . Falls  $m > n$ , dann  $\sum_{k=m}^n a_k := 0$

**Beispiel 1.23.** Definiere rekursiv für  $x \in \mathbb{R}$ :  $x^0 := 1$  und  $x^{n+1} := x \cdot x^n, n \in \mathbb{N}_0$  Betrachte

$$\sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n, x \in \mathbb{R}.$$

Dann heißt

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

geometrische Summenformel.

*Beweis.* Induktionsanfang für  $n = 1$ :

$$1 + x = \frac{(1+x)(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x}.$$

Induktionsschritt:  $n \rightarrow n+1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \sum_{k=0}^n x^k + x^{n+1} \\ &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + \frac{(1-x)(x^{n+1})}{1-x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}. \end{aligned}$$

□

Alternativbeweis mit Teleskop-Summe.

$$\begin{aligned}
 1 - x^{n+1} &= 1 - x + x - x^2 + x^2 - \dots - x^n + x^n - x^{n+1} + 1 \\
 &= \sum_{k=0}^n x^k - \sum_{k=1}^{n+1} x^k \\
 &= \sum_{k=0}^n x^k - \sum_{k=0}^n x^{k+1} \\
 &= \sum_{k=0}^n x^k - x
 \end{aligned}$$

□

Als Anwendung der geometrischen Summenformel ergeben sich nützliche Formeln, z.B.  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

*Beweis.* Für  $a = 0$  und  $a = b$  stimmt die Formel offenbar.

Betrachte geometrische Reihe mit  $x := \frac{b}{a} \neq 1$

$$\begin{aligned}
 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n &= 1 - x^n = (1 - x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \left(1 - \frac{b}{a}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^k \\
 a^n - b^n &= (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} b^k a^{n-1-k} = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k
 \end{aligned}$$

□

## 1.5 Elemente der Kombinatorik

Für  $n \in \mathbb{N}$  ist die Fakultät  $n!$  rekursiv definiert durch:

$$1! := 1 \text{ und } \forall n \in \mathbb{N} : (n+1)! = n!(n+1).$$

Per Definition  $0! := 1$

**Satz 1.24** (Permutationen). Die Anzahl aller Anordnungen (oder Permutationen) von  $n \in \mathbb{N}$  Elementen ist  $n!$ .

*Beweis.* Induktionsanfang:

$n = 1$ : Eine Anordnung 1

$n = 2$ : Zwei Anordnungen 12, 21

Induktionsschritt  $n \rightarrow n+1$ : Anzahl von Anordnungen der Elemente  $1, \dots, n+1$ , die das Element  $(n+1)$  auf Platz 1 hat bei beliebiger Anordnung der anderen Elemente nach Induktionsannahme ist  $n!$ . Für jedes der  $n+1$  Plätze ergeben sich wieder  $n!$  Anordnungen, d.h. insgesamt:  $n!(n+1) = (n+1)!$  □

**Definition 1.25** (Binomialkoeffizient). Für  $n, k \in \mathbb{N}$  definieren wir:

$$n \geq k \geq 1 : \binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

$$k = 0 : \binom{n}{0} := 1$$

$\binom{n}{k}$  ist die Anzahl der  $k$ -Elementigen Teilmengen einer  $n$ -Elementigen Menge, z.B.: Lotto  $\binom{49}{6} = 13.983.816$ .

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k} \end{aligned}$$

Es folgt  $\binom{n}{0} = 1$ ,  $\binom{n}{n} = 1$ ,  $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

**Lemma 1.26.** Für  $n, k \in \mathbb{N}$  mit  $0 < k < n$  gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-1-(k-1)+1)}{(k-1)!} + \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-1-k+1)}{(k-1)!k} \\ &= \frac{(n-1)\dots(n-k+1)(k+n-k)}{k!} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 1.27.** Mit Hilfe der Rekursionsformel

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

bzw

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

berechnet man die Binomialkoeffizienten explizit, auch bekannt als „Pascalsches Dreieck“.

**Satz 1.28** (Binomische Formel). Für  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

bzw.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n.$$

*Beweis durch Induktion.* Induktionsanfang  $n = 1$ :

$$a+b = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = 1a + 1b.$$



Annahme: Die Formel gilt für ein  $n \geq 1$

Induktionsschritt:  $n \rightarrow n + 1$

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
 &= (a+b) \left( \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \right) \\
 &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \dots + \binom{n}{n-1} a^2 b^{n-1} + \binom{n}{n} a b^n \\
 &\quad + \binom{n}{0} a^n b + \binom{n}{1} a^{n-1} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^n + \binom{n}{n} b^{n+1} \\
 &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \dots + \binom{n+1}{n} a b^n + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}.
 \end{aligned}$$

□

## 1.6 Grundlegendes über Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  natürliche Zahlen.

auf  $\mathbb{N}$  sind die arithmetischen Operationen „+“ (Addition) und „·“ (Multiplikation) definiert. Für diese gelten u.a. die Regeln:

$$\begin{aligned}
 n + m &= m + n \text{ bzw. } n \cdot m = m \cdot n && \text{Kommutativität} \\
 (n + m) + k &= n + (m + k) \text{ bzw. } (n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k) && \text{Assoziativität} \\
 (n + m) \cdot k &= n \cdot k + m \cdot k && \text{Distributivität}
 \end{aligned}$$

Subtraktion und Division sind nicht für alle Paare der natürlichen Zahlen definiert ( $1 - 2 \notin \mathbb{N}$ ,  $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ ), d.h. die natürlichen Zahlen sind bezüglich der Subtraktion und Division „unvollständig“. Dies bedeutet, dass für  $n, m \in \mathbb{N}$  z.B.: die Gleichung

$$n + x = m$$

nicht immer lösbar ist.

Deshalb werden die natürlichen Zahlen zu den ganzen Zahlen erweitert.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ ganze Zahlen.}$$

In  $\mathbb{Z}$  hat die Gleichung  $n + x = m$  die (eindeutige) Lösung:  $x = m - n \in \mathbb{Z}$ .

$\mathbb{Z}$  ist vollständig bezüglich der Subtraktion aber unvollständig bezüglich der Division, d.h. für beliebige  $b, y \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$ , die „lineare“ Gleichung  $b \cdot x = y$  nicht immer durch ein  $x \in \mathbb{Z}$  lösbar ist.

Diese Beschränkung wird durch die Einführung der rationalen Zahlen behoben:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{r}{s} \mid r \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{N} \right\}.$$

Die Menge  $\mathbb{Q}$  ist vollständig bezüglich der vier elementaren arithmetischen Operationen (bis auf die unzulässige Division durch Null).

$$a = \frac{r}{s}, b = \frac{u}{v} \in \mathbb{Q} = \begin{cases} a + b = \frac{r}{s} + \frac{u}{v} & := \frac{r \cdot v + u \cdot s}{s \cdot v} \\ a - b & := \frac{r \cdot v - u \cdot s}{s \cdot v} \\ a \cdot b & := \frac{r \cdot u}{s \cdot v} \\ \frac{a}{b} & := \frac{r \cdot v}{s \cdot u} \end{cases}.$$

$\mathbb{Q}$  bildet mit der Operation „+“ und „·“ einen „Körper“ bildet.

## 1.7 Was ist ein Körper?

Sei  $K$  eine Menge mit Operationen „+“ und „·“.

Operation „+“ erfüllt die Axiome der Addition

1. Kommutativität  $\forall a, b \in K : a + b = b + a$
2. Assoziativität  $\forall a, b, c \in K : (a + b) + c = a + (b + c)$
3. Neutrales Element  $\exists 0 \in K : \forall a \in K : a + 0 = a$
4. Additives Inverses  $\forall a \in K : \exists -a \in K : a + (-a) = 0$

Operation „·“ erfüllt Axiome der Multiplikation

1. Kommutativität  $\forall a, b \in K : a \cdot b = b \cdot a$
2. Assoziativität  $\forall a, b, c \in K : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. Neutrales Element  $\exists 1 \in K \setminus \{0\} =: K^* : \forall a \in K : a \cdot 1 = a$
4. Additives Inverses  $\forall a \in K : \exists a^{-1} \in K : a \cdot a^{-1} = 1$

Zusätzlich gilt „+“ und „·“ erfüllen die Distributivität (D):

$$\forall a, b, c \in K : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

**Definition 1.29** (Körper). Eine Menge  $K$  mit Operationen „+“ und „·“ ( $K, +, \cdot$ ) die Axiome A1-A4, M1-M4 und D erfüllt, heißt Körper.

**Beispiel 1.30.**  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  ist ein Körper  
 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ist kein Körper

**Definition 1.31** (Angeordneter Körper). Sei  $(K, +, \cdot)$  ein Körper. Es  $\exists p \subset K$  eine Teilmenge, die Axiome erfüllt:

1.  $\forall a \in K$  gilt genau eine der folgenden Aussagen:
  - (a)  $a \in P$
  - (b)  $a = 0$
  - (c)  $-a \in P$
2. Aus  $a > 0$  und auch  $b > 0$  folgt:  $a + b > 0$  und  $a \cdot b > 0$

Dann heißt  $(K, +, \cdot, >)$  angeordneter Körper.

**Definition 1.32** (Positivität). Sei  $(K, +, \cdot, >)$  ein angeordneter Körper.  $a \in K$  heißt positiv falls  $a > 0$ .  $a \in K$  heißt negativ falls  $a < 0$ .

$$K^+ := \{a \in K \mid a > 0\}.$$

$$K^- := \{a \in K \mid a < 0\}.$$

Ordnungsrelation für  $a, b \in K$

$$\begin{aligned} a < b &\iff b - a \in K^+ \\ b > a &\iff a < b \\ a \leq b &\iff a < b \vee a = b \\ b \geq a &\iff a \leq b \end{aligned}$$

Für je zwei  $a \in K, b \in K$  gilt genau eine der Relationen  $a < b, a = b, a > b$ .

Es gelten Regeln:

- $a < b, b < c \implies a < c$  Transitivität
- $a < b \implies a + c < b + c, c \in K$
- $a < b \implies a \cdot c < b \cdot c, c \in K^+$
- $a \geq b, b \geq a \iff a = b$
- $a < b, a > 0, b > 0 \iff \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

**Beispiel 1.33** (Positivität auf  $\mathbb{Q}$ ).

$$\mathbb{Q}^+ := \left\{ a \in \mathbb{Q} \mid a = \frac{r}{s}, r, s \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Definition 1.34** (Absolutbetrag). Sei  $(K, +, \cdot, >)$  ein angeordneter Körper. Dann

$$|a| := \begin{cases} a & \text{für } a > 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}.$$

Abbildung  $|\cdot|: K \rightarrow K$  mit Eigenschaften:

- $|a| = 0 \iff a = 0$  (Definiertheit)
- $|ab| = |a||b|$  (Multiplikativität)
- $|a + b| \leq |a| + |b|$  (Dreiecksungleichung)

*Beweis der Dreiecksungleichung.* Beobachtung:  $\pm a \leq |a| \implies a + b \leq |a| + |b| \implies -(a + b) \leq |a| + |b|$   $\square$

Es folgt aus den Eigenschaften:

- $|a - b| = 0 \implies a = b$
- $|-a| = |a|$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$
- $||a| - |b|| \leq |a - b|$  (folgt aus:  $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$  und  $|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|$ )

**Satz 1.35** (Dezimalbruchdarstellung). Jede rationale Zahl  $a$  besitzt eine endliche oder periodische Dezimalbruchdarstellung der Form:

$$a = \pm(a_0 + 0, d_1 \dots d_s) : \iff a = \pm \left( a_0 + \sum_{k=1}^s d_k \cdot 10^{-k} \right).$$

bzw.

$$a = \pm(a_0 + 0, d_1 \dots d_s \overline{d_{s+1} \dots d_{s+t}}).$$

$a_0 \in \mathbb{N}_0, d_1 \dots d_s \in \{0, 1, \dots, 9\}$  Ziffern

Umgekehrt stellt jede Dezimalbruchzerlegung dieser Art eine rationale Zahl dar.

Hier: bei periodischen Dezimalbrüchen ist die Periode  $\overline{9}$  nicht zugelassen:

$$a_0, d_1 \dots d_{k-1} d_k \overline{9} := a_0 + 0, d_1 \dots d_k (d_k + 1), d_k < 9.$$

*Beweis.* Siehe Lehrbuch

□

## 2 Die Reellen Zahlen

### 2.1 Von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen

**Lemma 2.1** (Irrationalität der Quadratwurzel). Die quadratische Gleichung  $x^2 = 2$  besitzt keine rationale Lösung.

*Beweis durch Widerspruch.* Angenommen: Es existiert eine rationale Lösung

$$x := \sqrt{2} = \frac{r}{s}.$$

mit Zahlen  $r \in \mathbb{Z}$  und  $s \in \mathbb{N}$ .

O.B.d.A. (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit) nehmen wir an, dass  $r$  und  $s$  teilerfremd sind.

Dann gilt:  $r \neq 0$  und  $r^2 = 2s^2$  und  $\frac{1}{2}r^2 = s^2$ . Also muss  $r^2$  und auch  $r$  gerade sein, denn  $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$  ungerade (Kontraposition). Damit sind auch  $\frac{1}{2}r^2$  gerade und  $s^2$  gerade.

Aber wegen Teilerfremdheit können  $r^2$  und  $s^2$  nicht beide durch zwei teilbar sein.  $\implies$  Widerspruch zur Annahme □

**Bemerkung 2.2.** Allgemeiner: „quadratische“ Gleichung

$$a + bx + cx^2 = 0.$$

ist nicht für beliebig gewählte  $a, b, c \in \mathbb{Q}$  durch ein  $x \in \mathbb{Q}$  lösbar.

**Bemerkung 2.3** (Beweisarten). Direkter Beweis:

$$E \implies E_1 \implies E_2 \implies \dots \implies E_k \implies V.$$

Indirekter Beweis: Zeigen  $E$  und  $\neg V$  immer falsch. Da  $E$  immer wahr ist, muss  $\neg V$  falsch sein. Da  $\neg V$  falsch ist, dann ist  $V$  wahr.

**Ziel:** Konstruiere rationale Zahlen, welche die Gleichung  $x^2 = 2$  mit zunehmender Genauigkeit erfüllen, z.B. rekursiv durch Einschließung mit Hilfe von Dezimalbrüchen.

Wir nutzen die Eigenschaft:  $a, b > 0$  und  $a^2 < b^2 \implies a < b$ , folgt aus:

$$b^2 - a^2 = (b - a)(b + a), (b + a > 0).$$

Start:  $a_1 := 1, 4, b_1 := 1, 5$  mit  $a_1 < b_1, a_1^2 = 1, 96 < 2 < 2, 25 = b_1^2$

2 Fälle:

Fall a) Es liege für ein  $n \in \mathbb{N}$  eine Einschließung vor:

$$a_n = 1, d_1 d_2, \dots d_{n-1} d_n < b_n = 1, d_1 d_2 \dots d_{n-1} (d_{n+1}).$$

$$a_n^2 < 2 < b_n^2.$$

$$d_k \in \{0, 1, \dots, 9\}, k = 1 \dots n-1, dn \leq 8$$

Die nächste Einschließung ist

$$a_{n+1} := 1, d_1 \dots d_n, d_{n+1}, d_{n+1} \in \{0, 1, \dots, 9\}.$$

$a_{n+1}$  möglichst groß aber  $a_{n+1}^2 < 2$ .

und

$$b_{n+1} := \begin{cases} 1, d_1, \dots, d_n(d_{n+1} + 1) & \text{für } d_{n+1} \leq 8 \\ 1, d_1, \dots, (d_n + 1)0 & \text{für } d_{n+1} = 9 \end{cases}.$$

Nach Konstruktion:

$$\begin{aligned} a_n &< a_{n+1} < b_{n+1} < b_n. \\ a_{n+1}^2 &< 2 < b_{n+1}^2. \end{aligned}$$

Fall b) Für ein  $n \in \mathbb{N}$  liegt eine Einschließung vor

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, d_1 \dots d_{n-1} d_n < b_n = 1, d_1 d_2 \dots d_{n-1} (d_n + 1) 0 \dots 0. \\ a_n^2 &< 2 < b_n^2 \text{ mit } d_k \in \{0, 1, \dots, 9\}, k = 1, n = 1. \\ d_n &\leq 8, d_{n+1} = \dots = d_n = 9. \end{aligned}$$

Die nächste Einschließung

$$a_{n+1} := 1, d_1 \dots d_n, d_{n+1}, d_{n+1} \in 0, 1, \dots, 9.$$

$a_{n+1}$  möglichst groß, aber  $a_{n+1}^2 < 2$ .

$$b_{n+1} = \begin{cases} 1, d_1 \dots d_n (d_{n+1} + 1) & \text{für } d_{n+1} \leq 8 \\ 1, d_1 \dots d_{n-1} (d_n + 1) 0 \dots 0 & \text{für } d_{n+1} = 9 \end{cases}.$$

Der Fall b) kann nur endlich oft hintereinander auftreten, dann wäre  $a_n = b_n$  ab einem gewissen  $n$  und folglich  $a_n^2 = 2$

Nach Konstruktion:

$$\begin{aligned} a_n &< a_{n+1} < b_{n+1} < b_n. \\ a_{n+1}^2 &< 2 < b_{n+1}^2. \end{aligned}$$

Wir erhalten 2 Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit den Eigenschaften

$$1, 4 = a_1 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq \dots b_1 = 1, 5.$$

Konkret:  $a_1 = 1, 4, a_2 = 1, 41, a_3 = 1, 414, b_1 = 1, 5, b_2 = 1, 42, b_3 = 1, 415$

Abstand  $b_n - a_n \leq 10^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  wird immer kleiner  $\implies$  wir sollen die Zahl  $\sqrt{2}$  eventuell erfassen!

**Definition 2.4** (Zahlenfolge). Eine Menge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nummerierter rationaler Zahlen wird „Folge“ genannt.

**Beispiel 2.5.**  $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

$$a_1 = 2, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{5}{4}$$

Offenbar,  $1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$  bzw.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

d.h. Folge konvergiert gegen 1

**Definition 2.6** (Konvergenz). Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt konvergent, gegen einen „Limes“  $a$ , wenn gilt:

$$|a_n - a| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Falls  $|a_n|, n \rightarrow \infty$  heißt  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  strikt divergent.

Präziser (Cauchy)

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist „konvergent“ gegen einen Grenzwert  $a$ , wenn:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists n := n(\epsilon) = n_\epsilon.$$

sodass

$$|a_n - a| < \epsilon \text{ für } n \geq n_\epsilon.$$

**Lemma 2.7.**  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy Folgen.

*Beweis.* Sei  $a_n \leq b_n$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ , aber  $b < a$ . Dann  $\exists \delta > 0$  mit  $b + \delta = a$ .

Wegen der Konvergenz:

$$b_n \rightarrow b, a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty.$$

$$\exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ s.d. } |b - b_n| \leq \frac{1}{2}\delta.$$

und

$$|a - a_n| \leq \frac{1}{2}\delta \quad \forall n > n_\epsilon.$$

Dann

$$b_n = b_n - b + b - a + a - a_n + a_n \leq |b_n - b| + b - a + |a - a_n| + a_n \leq \frac{1}{2}\delta - \delta + \frac{1}{2}\delta + a_n = a_n.$$

$\Rightarrow$

$$b_n \leq a_n.$$

Widerspruch zur Annahme, dass  $a_n \leq b_n$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ . □

**Bemerkung 2.8** (Folgerung aus 3). Sei Cauchy-Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  keine Nullfolge und  $a_n \rightarrow a, a > 0, n \rightarrow \infty$ . Dann  $a_n > 0$  für fast alle  $n$ .

*Beweis.* Annahme:  $a_n \leq 0$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ , dann  $a_n \rightarrow a \leq 0 \leftarrow \{0\} \quad n \in \mathbb{N}$  □

**Ziel:** Reelle Zahlen als Grenzwerte von rationalen Cauchy Folgen.

Wichtig: Zwei Cauchy Folgen mit gleichem Limes definieren gleiche Zahl. Deshalb: Äquivalenzklassen

**Definition 2.9** (Äquivalenzrelation für Cauchy Folgen rationaler Zahlen).

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (a'_n)_{n \in \mathbb{N}} : \iff |a_n - a'_n| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Die Relation ist Äquivalenzrelation. 1. Reflexivität ( $a \sim a$ ) (trivial)

2. Symmetrie ( $a \sim b \implies b \sim a$ )

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \iff |a_n - b_n| \rightarrow 0 \iff |b_n - a_n| \rightarrow 0 \iff (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (a_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

3. Transitivität  $a \sim b, b \sim c \implies a \sim c$

$$\begin{aligned} (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (c_n)_{n \in \mathbb{N}} &\iff |a_n - b_n| \rightarrow 0, |b_n - c_n| \rightarrow 0 \\ &\iff \forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \text{ s.d.} \\ &\quad \forall n \geq n_\epsilon. \end{aligned}$$

Dann

$$|a_n - c_n| = |(a_n - b_n) + (b_n - c_n)| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n|.$$

□

**Definition 2.10** (Äquivalenzklassen).

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{R}} &:= \{[a_n]_{n \in \mathbb{N}}\} \\ &= \{(a'_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (a'_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (a_n)_{n \in \mathbb{N}}\} \\ &= \{(a'_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (a'_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0\}.\end{aligned}$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Repräsentant von Klasse  $[(a_n)]_{n \in \mathbb{N}}$

**Bemerkung 2.11.**  $a \in \mathbb{Q} \implies$

$$[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, a_n := a] \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Jede Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  einer Cauchy Folge

$$(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \in [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}].$$

Jede Äquivalenzklasse  $[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$  von Cauchy Folge rationaler Zahlen definiert genau eine reelle Zahl

**Satz 2.12.** Jeder Äquivalenzklasse  $[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$  entspricht genau einem (möglicherweise unendlichen) Dezimalbruch.

Die Menge aller dieser Dezimalbrüche wird bezeichnet als Menge  $\mathbb{R}$  der „reellen Zahlen“.

$$\mathbb{R} = \{a := \pm(a_0 + 0, d_1 d_2 d_3 \dots d_k \mid a_0 \in \mathbb{N}_0, d_k \in \{0, \dots, 9\})\}.$$

Für eine CF rationaler Zahlen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wird  $a \in \mathbb{R}$  als Grenzwert bezeichnet:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt eine „approximierende“ Folge von  $a \in \mathbb{R}$ . In diesem Sinne hat jede CF rationaler Zahlen nach Konstruktion einen Grenzwert in  $\mathbb{R}$ .

**Bemerkung 2.13** (Erinnerung Geometrische Reihe).

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, x \neq 1.$$

*Beweis.* 1.  $\forall a \in \mathbb{R} \exists [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] \in \overline{\mathbb{R}}$

$$a = \pm(a_0 + 0, d_1 d_2 d_3 \dots).$$

definieren wir eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (rationaler) endlicher Teilbrüche:

$$a_n = \pm(a_0, d_1 \dots d_n), a_0 \in \mathbb{N}_0, d_k \in \{0, \dots, 9\}.$$

zu zeigen:  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchy Folge.

Sei  $m > n + 1$ , dann

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &= |a_0 + 0, d_1 d_2 \dots d_n - (a_0 + 0, d_1 d_2 \dots d_n d_{n+1} \dots d_m)| \\ &= |0, 00 \dots 0 d_{n+1} \dots d_m| \\ &= d_{n+1} 10^{-(n+1)} + \dots + d_m 10^{-m} \\ &\leq 10^{-n} (d_{n+1} 10^{-1} + \dots + d_m 10^{-m+n}) \\ &\leq 10^{-n} (10^0 + \dots + 10^{-m+n+1}) \\ &= 10^{-n} \left( \left( \frac{1}{10} \right)^0 + \dots + \frac{1}{10}^{m-n-1} \right) \\ &= 10^{-n} \frac{1 - \frac{1}{10}^{m-n}}{1 - \frac{1}{10}} \\ &\leq 10^{-n} \frac{1}{\frac{9}{10}} \\ &= 10^{-n} \frac{10}{9} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

$\implies (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist Cauchy Folge und repräsentiert eine Klasse  $[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] \in \overline{\mathbb{R}}$   
„Einbettung“  $a \mapsto [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$

2. Wir zeigen, dass diese „Einbettung“ bijektiv ist.

a)  $a \mapsto [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$  ist injektiv ( $\forall a, a' \in \overline{\mathbb{R}}$  gilt: aus  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  folgt  $a = a'$ )

Für

$$\begin{aligned} a &= a_0 + 0, d_1 d_2 \dots \\ a' &= a'_0 + 0, d'_1 d'_2 \dots \end{aligned}$$

gilt:

$$\begin{aligned} |a_n - a'_n| &= |a_0 + 0, d_1 \dots d_n - (a'_0 + 0, d'_1 \dots d'_n)| \\ &\leq \epsilon, \forall n \geq n_\epsilon, \forall \epsilon > 0. \end{aligned}$$

$$\implies a = a'$$

b) „Einbettung“  $a \mapsto [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$  ist surjektiv

(i) Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Nullfolge

$$\implies z = 0 = 0, 00 \dots$$

(ii) Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  keine Nullfolge Dann fast alle  $a_n > 0$  oder fast alle  $a_n < 0$  O.B.d.A.  $a_n > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$

Ziel:  $z \geq 0$  zu konstruieren.

Falls  $a_n < 0$  (bzw.  $-a_n > 0$  konstruiert  $-z$ )

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \implies \text{beschränkt} \implies \exists N \in \mathbb{N} (N \geq 2) \text{ s.d. } 0 < a_n < N, n \in \mathbb{N}.$$

Dann  $\exists z_0 \in \mathbb{N}_0$ , s.d. im Intervall:

$$I_0 := \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq z_0 \leq x < z_0 + 1 < n\}.$$

unendlich viele Elemente von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  liegen.

□

**Heute:** Frustcafé (deswegen kürzere Plenarübung)

**Nächsten Mittwoch:** Vorlesung fällt aus, aber Ersatztermin wird gesucht.

Fortsetzung Beweis:

*Beweis.* 1. Zz:  $\forall [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] \in \overline{\mathbb{R}} \exists z \in \mathbb{R}$

$$z = \pm (z_0 + 0, d_1 d_2 d_3 \dots).$$

O.B.d.A.  $z > 0, a_n > 0, n \in \mathbb{N}$

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ C.F.} \implies 0 < a_n < N \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\implies z_0 \in \mathbb{N}_0, \text{ s.d. O.B.d.A. } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I_0$$

$$I_0 := \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq z_0 \leq x < z_0 + 1 < N\}.$$

$I_0$  wird unterteilt in 10 Teilintervalle.

Für ein  $d_1 \in \{0, \dots, 9\}$  ein Intervall

$$I_1 := \{x \in I_0 \mid z_0 + d_1 \cdot 10^{-1} \leq x < z_0 + (d_1 + 1) \cdot 10^{-1}\}.$$

Sei  $z_1 = z_0 + 0, d_1$ , dann

$$I_1 = \{x \in I_0 \mid z_1 \leq x < z_1 + 10^{-1}\}.$$

$$\implies \exists n_1 \text{ Index s.d. } |z_1 - a_{n_1}| \leq 10^{-1}$$

usw. ...



Ergebnis: eine Folge von Teilintervallen

o.B.d.A.

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \dots \subset I_{k+1} \subset I_k \subset \dots \subset I_1 \subset I_0.$$

$$z_k := z_{k-1} + d_k \cdot 10^{-k} \in \mathbb{Q}.$$

$$I_k = \{x \in I_{k-1} \mid z_k \leq x < z_k + 10^{-k}\}.$$

$\exists n_k$  : Index s.d.  $|z_k - a_{n_k}| \leq 10^{-k}$

Das heißt für eine Folge

$$z_k := z_0 + 0, d_1 d_2 \dots d_k \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N}.$$

existiert eine Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von der C.F.  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , s.d.  $|z_k - a_{n_k}| \leq 10^{-k}$ ,  $k \in \mathbb{N} \implies (z_k - a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  Nullfolge, d.h.

$$\implies (z_k)_{k \in \mathbb{N}} \sim (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$$

$$\implies (z_k)_{k \in \mathbb{N}} \sim (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\implies (z_k)_{k \in \mathbb{N}} \in [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$$

und der resultierende Dezimalbruch ist:

$$z := z_0 + 0, d_1 d_2 \dots d_k \dots \in \mathbb{R}.$$

Wir haben gezeigt:

$$\forall [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] \in \overline{\mathbb{R}}: \exists z \in \mathbb{R}.$$

Damit:  $\implies$  Abbildung ist surjektiv und damit bijektiv.

$$\implies \exists \text{ „inverse Abbildung“ } : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

die auch bijektiv ist.

Diese Abbildung ist auch verträglich mit der Addition und der Multiplikation, d.h.  $[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] \mapsto a$  und  $[(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}] \mapsto a'$

$$\text{Dann } [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] + [(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}] := a + a'$$

$$[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] \cdot [(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}] := a \cdot a'$$

Abbildung  $\mathbb{R} \longleftrightarrow \overline{\mathbb{R}}$  ist Isomorphismus. □

**Bemerkung 2.14.** Die Darstellung ist durch einen Dezimalbruch ist nicht immer eindeutig. z.B.:

$$0,9999\dots = 0,\overline{9} = 1 = 1,0000\dots$$

Deshalb, falls  $z = z_0 + 0, d_1 d_2 \dots d_k 999 \dots$   $d_k \leq 8$  dann:

$$z := z_0 + 0, d_1 d_2 \dots (d_k + 1) 0 \dots$$

**Bemerkung 2.15.** Der Satz gilt auch für „b-adische“ Brüche mit Basis  $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$  :  $a \in \mathbb{R}$  besitzt eine sogenannte „b-adische Entwicklung“:

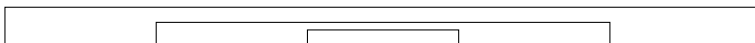
$$a = \pm(a_0 + 0, d_1 d_2 \dots) = \pm(a_0 + d_1 \cdot b^{-1} + d_2 \cdot b^{-2} + \dots).$$

mit  $a_0 = g_0 + g_1 \cdot b + g_2 \cdot b^2 + \dots \in \mathbb{N}_0$  mit Ziffern  $d_n, g_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}$  Für  $b = 2$  : diadische Entwicklung

### 2.1.1 Zusammenfassung

Beobachtung: Jede reelle Zahl ist ein Grenzwert von einer Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  rationaler Zahlen.

Beispiel:  $\sqrt{2}$



$$\forall (a_n), (b_n) \ a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow a \iff (a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Nullfolge.}$$

Deshalb:

- Definiere C.F. rationaler Zahlen
- Äquivalenzrelation:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (b_n)_{n \in \mathbb{N}} : \Longleftrightarrow (a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Nullfolge.}$$

und Äquivalenzklasse:

$$\overline{R} := \{[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]\}.$$

- Eine Klasse aus  $\overline{\mathbb{R}} \Longleftrightarrow$  eine reelle Zahl

Konstruktion nach Cantor, 1873

Als nächstes:  $\mathbb{R}$  ist ein angeordneter Körper mit „+“, „·“, „>“ und ist auch „vollständig“.

## 2.2 Der Körper $\mathbb{R}$

Seien  $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$  und  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zugehörige approximierende Folgen rationaler Zahlen.

Alle Struktureigenschaften von  $\mathbb{Q}$  sind über den Grenzübergang auf  $\mathbb{R}$  übertragbar.

**Definition 2.16** (Absolutbetrag).

$$|a| := \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|.$$

Folglich: Begriffe „Konvergenz“ und „Cauchy-Folgen“ gelten auch für Folgen reeller Zahlen.

**Definition 2.17** (Arithmetische Grundoperationen).

$$a + b := \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n).$$

$$a \cdot b := \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n).$$

**Definition 2.18** (Ordnungsrelation).

$$a > b : \Longleftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) > 0.$$

und folglich:  $\exists \alpha \in \mathbb{Q}_+$  s.d.  $a_n - b_n \geq \alpha$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ .

$$a \geq b : \Longleftrightarrow a > b \text{ oder } a = b.$$

$$a < b : \Longleftrightarrow b > a.$$

$$a \leq b : \Longleftrightarrow b \geq a.$$

**Definition 2.19** (Positivität).

$$\mathbb{R}^+ := \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}.$$

**Bemerkung 2.20.** Definitionen sind unabhängig von der Wahl der Folge:

*Beispiel für Absolutbetrag.* Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei approximierende Folgen von  $a$ , d.h.  $(a_n - a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Nullfolge.

Zu zeigen:

$$|a| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a'_n|.$$

d.h. zu zeigen:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |a'_n| \\ \Longleftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (|a_n| - |a'_n|) &= 0. \end{aligned}$$

Betrachte:

$$||a_n| - |a'_n|| \leq |a_n - a'_n| < \epsilon.$$

$\Rightarrow (|a_n| - |a'_n|)$  ist Nullfolge

$\Rightarrow |a_n| = |a'_n|$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a'_n| = |a|$

□

Die anderen Beweise folgen analog.

**Satz 2.21** (Der vollständige Körper  $\mathbb{R}$ ). 1.  $(\mathbb{R}, +, \cdot, >)$  ist angeordneter Körper

2.  $\mathbb{Q}$  ist Unterkörper von  $\mathbb{R}$

3. Der Körper  $\mathbb{Q}$  ist vollständig, d.h. jede Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}$  hat einen Grenzwert in  $\mathbb{R}$ .

4. Der Unterkörper  $\mathbb{Q}$  ist „dicht“ in  $\mathbb{R}$ , d.h.

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists q_\epsilon \in \mathbb{Q} \text{ s.d. } |a - q_\epsilon| < \epsilon.$$

*Beweis.* 1) Körperaxiome (Kommutativität, Assoziativität, Distributivität) sind trivial

Neutrales Element der Addition:

$$0 := 0, 0 \dots 0 \text{ Klasse der Nullfolgen z.B.: } a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}.$$

Neutrales Element der Multiplikation

$$1 := 1, 0 \dots 0 \quad [(1)_{n \in \mathbb{N}}].$$

Existenz der inversen Elemente bezüglich der Addition

$$a + x = 0, a \in \mathbb{R}.$$

$$x = -a = \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n).$$

Existenz der inversen Elemente bezüglich der Multiplikation

$$b \cdot x = 1, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$x = \frac{1}{b} := \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

$$(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = ?$$

$$b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$$

$$\Rightarrow (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ keine Nullfolge} \Rightarrow \text{fast alle Elemente } b_n \neq 0 \text{ (Übung!)}$$

Definiere:

$$c_n := \begin{cases} 0 & b_n = 0 \\ \frac{1}{b_n} & b_n \neq 0 \end{cases}.$$

Dann  $(b_n \cdot c_n) =$

$$(b_n \cdot c_n) = \begin{cases} 0 & b_n = 0 \\ 1 & b_n \neq 0 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n \cdot c_n) = 1$$

2)  $a \in \mathbb{Q}$  entspricht  $[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$  mit  $a_n = a \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}$  Körper

$\Rightarrow \mathbb{Q}$  Unterkörper von  $\mathbb{R}$ .

3) Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine C.F. reeller Zahlen.

$$\forall a_n \in \mathbb{R} \exists \text{ approx. Folge } (a_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}.$$

$$a_{n,m} \in \mathbb{Q} \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

$$a_n := \lim_{m \rightarrow \infty} a_{n,m} \in \mathbb{R}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$  wähle  $k_n \in \mathbb{N}$  mit:

$$|a_n - a_{n,k_n}| < \frac{1}{n}.$$

Wir zeigen, dass  $(a_{n,k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  rationaler Zahlen eine C.F. ist.

Sei  $\epsilon > 0$ . Dann

□

**Bemerkung 2.22** (Organisatorisches). Nächsten Mittwoch (20. November) findet keine Vorlesung und auch keine Plenarübung statt. Aber Mittwoch (27.11.) Vorlesung statt Plenarübung im großen Hörsaal Chemie

**Satz 2.23** (Wichtiger Satz). Der Körper  $\mathbb{R}$  ist vollständig, d.h. jede Cauchy Folge in  $\mathbb{R}$  hat einen Limes

*Beweis.* Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy Folge reeller Zahlen, d.h.  $a_n \in \mathbb{R}$ .

$$a_n \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : \exists \text{ C.F. } (a_{n,m}).$$

$$a_{n,m} \in \mathbb{Q} \forall n, m \in \mathbb{N}, a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{n,m}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$  wähle Index  $k_n \in \mathbb{N}$  mit

$$|a_n - a_{n,k_n}| < \frac{1}{n}.$$

$k_n$  existiert, weil  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{n,m} = a_n$  und damit  $|a_n - a_{n,m}| \rightarrow 0$  also  $\exists \epsilon |a_n - a_{n,m}| < \epsilon < \frac{1}{n}$  und Archimedisches Axiom.

Ziel: zu zeigen  $(a_{n,k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  rationaler Zahlen ist Cauchy Folge.

Sei  $\epsilon > 0$ . Dann  $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$  s.d.  $\forall n, m \geq n_\epsilon$  :

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &< \frac{1}{3}\epsilon, |a_n - a_{n,k_n}| < \frac{1}{3}\epsilon \\ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} &\text{C.F.} \\ |a_m - a_{m,k_m}| &< \frac{1}{3}\epsilon \text{ (AA).} \end{aligned}$$

und folglich

$$|a_{n,k_n} - a_{m,k_m}| \leq |a_{n,k_n} - a_n + a_n - a_m + a_m - a_{m,k_m}| \leq |a_{n,k_n} - a_n| + |a_n - a_m| + |a_m - a_{m,k_m}| < \epsilon.$$

$\implies (a_{n,k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy Folge  $\implies$  Nach Konstruktion der  $\mathbb{R}$  folgt, dass  $\exists$  „limes“  $a \in \mathbb{R}$ , s.d.

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\epsilon : |a_{n,k_n} - a| < \epsilon.$$

Dann gilt für die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n,k_n}| + |a_{n,k_n} - a| \leq \frac{1}{n} + |a_{n,k_n} - a| \rightarrow 0.$$

$$\implies a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$\mathbb{Q}$  ist dicht in  $\mathbb{R}$ , d.h.

$$\forall a \in \mathbb{R} \text{ gilt } \forall \epsilon > 0 \exists q_\epsilon \in \mathbb{Q} \text{ s.d. } |a - q_\epsilon| \leq \epsilon.$$

Nach Konstruktion von  $\mathbb{R}$  folgt:

$$\begin{aligned} \forall \text{C.F. } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} a_n &\in \mathbb{Q} : \\ \exists a \in \mathbb{R} : a &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n. \end{aligned}$$

$$\implies \forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon |a_n - a| < \epsilon \forall n \geq n_\epsilon$$

□

**Bemerkung 2.24** (Archimedisches Axiom).

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : \text{s.d. } n - a > 0 \\ \implies \forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.d. } n - \frac{1}{\epsilon} > 0 \\ \implies \frac{1}{n} < \epsilon. \end{aligned}$$

## 2.3 Wichtige Aussage

$\mathbb{R}$  ist vollständig, da alle C.F. in  $\mathbb{R}$  haben einen Grenzwert in  $\mathbb{R}$ .

## 2.4 Weitere Möglichkeiten, die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zu charakterisieren

**Definition 2.25** (Maximum, Minimum, obere/untere Schranke, Supremum, Infimum). Sei  $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset$ .

Maximum:

$$\max M := b \in M : b \geq x, \forall x \in M.$$

Minimum:

$$\min M := a \in M : x \geq a, \forall x \in M.$$

Obere Schranke:

$$b \in \mathbb{R}, \text{ s.d. } b \geq x, \forall x \in M.$$

Untere Schranke:

$$a \in \mathbb{R}, \text{ s.d. } x \geq a, \forall x \in M.$$

Eine Menge  $M$  heißt nach oben (unten) beschränkt, falls eine obere (untere) Schranke von  $M$  existiert.

Supremum: kleinste obere Schranke

Infimum: größte untere Schranke

**Beispiel 2.26.** •  $\mathbb{N}$  ist von unten beschränkt, z.B. mit 0.  $\min \mathbb{N} = 1$ , von oben unbeschränkt.

- $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$ : obere Schranke ist  $\sqrt{2}$  und untere Schranke ist  $-\sqrt{2}$ , aber  $M$  besitzt kein Maximum bzw. Minimum.  $\sqrt{2}$  ist Supremum und  $-\sqrt{2}$  ist Infimum

**Bemerkung 2.27.** Falls  $b = \sup M \iff$  :

1.  $b$  ist eine obere Schranke von  $M$ , d.h.  $\forall x \in M : x \leq b$  und
2. Jede Zahl  $c < b$  ist keine obere Schranke von  $M$ , d.h.  $\forall c \in M, c < b, \exists x \in M : c < x$  (oder  $\forall \epsilon > 0 \exists x \in M : x > b - \epsilon$ )

Analog für  $a = \inf M$

**Beispiel 2.28.**

$$I = (a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

dann gilt  $\sup I = b, \inf I = a$ .

**Bemerkung 2.29.** Das Supremum (Infimum) muss nicht zur Menge  $M$  gehören, aber falls  $\sup M \in M$ , dann  $\sup M = \max M$ .

**Satz 2.30** (Vollständigkeit in  $\mathbb{R}$  Nr. 2).  $\mathbb{R}$  vollständig  $\iff$  jede nichtleere beschränkte Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}$  besitzt ein Supremum bzw. Infimum

**Definition 2.31** (Intervalle).

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  abgeschlossenes Intervall.

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  offenes Intervall.

$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$  halboffenes Intervall.

$[a, b)$  analog.

**Definition 2.32** (Intervallschachtelung). ist eine Folge von abgeschlossenen Intervallen  $I_n := [a_n, b_n] := \{x \in \mathbb{R} \mid a_n \leq x \leq b_n\}, n \in \mathbb{N}$  mit Eigenschaften. 1)  $I_{n+1} \subset I_n, n \in \mathbb{N}$  (bedeutet  $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ ) 2)  $\forall \epsilon > 0, \exists I_n$  mit der Länge

$$|b_n - a_n| < \epsilon \text{ d.h. } |b_n - a_n| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

**Satz 2.33** (Vollständigkeit in  $\mathbb{R}$  Nr. 3). Vollständigkeit in  $\mathbb{R} \iff$  Intervallschachtelungseigenschaft d.h. für jede Intervallschachtelung.

$$(I_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}$$

so dass

$$c = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n := \{x \in \mathbb{R} \mid x \in I_n \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Diese Aussage ist verwandt mit dem Axiom vom Dedekindschen Schnitt

**Satz 2.34** (Trennungseigenschaft). Seien  $A, B \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$  mit  $a < b \forall a \in A, b \in B$

Dann existiert immer ein  $c \in \mathbb{R}$ , welches A und B trennt:

$$\forall a \in A, b \in B \text{ gilt } a \leq c \leq b.$$

Dies ist ebenfalls  $\iff$  zur Vollständigkeit in  $\mathbb{R}$

**Lemma 2.35** (Existenz der  $k$ -ten Wurzel einer positiven reellen Zahl).  $\forall a \in \mathbb{R}^+ \forall k \in \mathbb{N}$ : existiert eine positive  $k$ -te Wurzel. Das heißt die Lösung der Gleichung

$$x^k = a.$$

ist  $\sqrt[k]{a}$  (Bezeichnung).

*Beweis.* 1) Die Eindeutigkeit der  $\sqrt[k]{a}$  (falls sie existiert)

Seien  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  zwei  $k$ -te Wurzeln des  $a \in \mathbb{R}^+$  :

$$x_1^k = a = x_2^k.$$

Dann gilt:

$$0 = x_1^k - x_2^k = (x_1 - x_2) \underbrace{\sum_{m=0}^{k-1} x_1^{k-1-m} x_2^m}_{>0}.$$

mit dieser Hilfsformel

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k.$$

$$\implies x_1 - x_2 = 0 \implies x_1 = x_2$$

2) Existenz:  $a = 1 \implies \sqrt[k]{1} = 1$  ( $1^k = 1$ ) Sei  $a > 1$  und Annahme, dass  $\exists$  Wurzel für  $0 < a' < 1$   
Dann definiere:

$$\sqrt[k]{a} := \frac{1}{\sqrt[k]{\frac{1}{a}}}.$$

$$(\sqrt[k]{a})^k = \left(\frac{1}{\sqrt[k]{a'}}\right)^k = \frac{1}{\sqrt[k]{a'}^k} = \frac{1}{a'} = a.$$

Es bleibt zu zeigen:  $\exists \sqrt[k]{a}$  für  $0 < a < 1$ . □

Heute: Längstes deutsches Wort!

„Intervallschachtelungseigenschaft hat ganze 33 Buchstaben“ meint Kostina.

*Fortsetzung des Beweises vom letzten Mal.* Ab jetzt:  $n$  statt  $k$ .

Zu zeigen: Es existiert eine Wurzel für  $0 < a < 1$ .

Definiere Menge  $M := \{y \in \mathbb{R} | 0 < y < 1, y^n < a\}$

$M \neq \emptyset$ , weil  $\frac{1}{2}a \in M$ .  $M$  ist auch beschränkt, untere Schranke 0, obere Schranke 1.

Da  $\mathbb{R}$  vollständig  $\implies \exists \sup M =: x$ .

Zu zeigen:  $x^n = a$  Annahme:  $x^n < a$ . Wegen  $(x+1) \notin M$  gilt  $(x+1)^n > a$ . Konstruiere:

$$\tau := \frac{\overbrace{a - x^n}^{>1}}{(x+1)^n - x^n}.$$

$$\begin{aligned} (x+\tau)^n &= x^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \tau^k x^{n-k} \\ &< x^n + \tau \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \\ &= x^n + \tau((x+1)^n - x^n) \\ &\stackrel{\text{Def. } \tau}{=} x^n + (a - x^n) = a. \end{aligned}$$

$\implies$

$$(x+\tau)^n < a \implies (x+\tau) \in M.$$

und damit:

$$x + \tau > x \quad \text{Widerspruch zu } x = \sup M.$$

(folgt aus der binomischen Formel:  $(x+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k}$ )

Annahme:  $x^n > a$

Nach der Ungleichung von Bernoulli gilt für  $\tau := \frac{x^n - a}{nx^n}$ . ( $0 < \tau < \frac{x^n - a}{x^n} < 1$ ) Damit:

$$\begin{aligned} (x - \tau x)^n &= x^n(1 - \tau)^n \geq x^n(1 - n\tau) \\ &= x^n \left(1 - \frac{x^n - a}{x^n}\right) = a. \end{aligned}$$

$\implies$  Für  $y \in M$  gilt:

$$y^n < a < (x - \tau x)^n.$$

$\implies$

$$0 < (x - \tau x)^n - y^n = \underbrace{(x - \tau x - y) \sum_{k=0}^n (x - \tau x)^{n-1-k} y^k}_{>0}.$$

$\implies x - \tau x - y > 0$

$\implies y < x - \tau x < x \implies x - \tau x < x$  eine obere Schranke von  $M$ . Widerspruch zu  $x = \sup M$

(Formel:  $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$ ) □

**Bemerkung 2.36** (Ungleichung von Bernoulli). Sei  $x \geq -1$ , dann gilt:

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \forall n.$$

**Definition 2.37** (Allgemeine rationale Potenzen).  $a^q, q = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}, a > 0, a \in \mathbb{R}$  wird definiert durch

$$a^q = a^{\frac{r}{s}} := (\sqrt[s]{a})^r.$$

**Bemerkung 2.38.** • Regeln für das Rechnen mit Wurzeln

$$(\sqrt[s]{a})^r = (a^{\frac{1}{s}})^r = a^{\frac{r}{s}} = (a^r)^{\frac{1}{s}} = \sqrt[s]{a^r}.$$

- Für  $a \in \mathbb{R}_+$  wird unter  $\sqrt[k]{a}$  **immer** die positive  $k$ -te Wurzel verstanden.  
 $\implies$  Aussage  $\sqrt{a^2} = a$  ist falsch.  
 Korrekt:  $\sqrt{a^2} = |a|$

Die Gleichung  $x^2 = a$  hat zwei Lösungen:  $x_1 = \sqrt{a}, x_2 = -\sqrt{a}$

**Bemerkung 2.39** (Reelle Potenzen).  $a \in \mathbb{R}_+, r \in \mathbb{R}, a^r$  - ?

$\exists (q_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow r, q_n \in \mathbb{Q}$ , damit:

$$a^r := \lim_{n \rightarrow \infty} a^{q_n}.$$

Noch zu überprüfen: ob der Grenzwert existiert und eindeutig ist

**Beispiel 2.40.**  $\sqrt{2}, (q_n) = \{1.4, 1.41, 1.414, \dots\}$

$$a^{\sqrt{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{q_n}, a_1 = a^{1.4}, a_2 = a^{1.41}, \dots$$

Analog über Intervallschachtelung:

$$\begin{aligned} I_1 &= [1.4; 1.5] \\ I_2 &= [1.41; 1.42] \\ I_3 &= [1.414; 1.415] \\ I_n &= [r_n, s_n]. \end{aligned}$$

$$a^{\sqrt{2}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{I_n}.$$

Alternative Definition über exp und ln

$$a^r = \exp(r \ln a).$$

und Reihenentwicklung:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

oder

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

## 2.5 Mächtigkeit von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$

**Definition 2.41** (Mächtigkeit). Die Mächtigkeit einer Menge ist die Anzahl ihrer Elemente.

Eine Menge ist „unendlich“, wenn eine bijektive Abbildung  $f : A \rightarrow$  Echte Teilmenge von  $A$  existiert. Dann  $|A| = \infty$ .

Eine unendliche Menge, deren Elemente mit Hilfe der natürlichen Zahlen durchnummeriert werden kann, heißt „abzählbar (unendlich)“, sonst „überabzählbar“.

Abzählbarkeit heißt: Es existiert eine bijektive Abbildung  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ .

**Beispiel 2.42.** •  $A = \{a_1, a_2, a_3\}$  dann  $|A| = 3$

- $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  sind unendliche Mengen

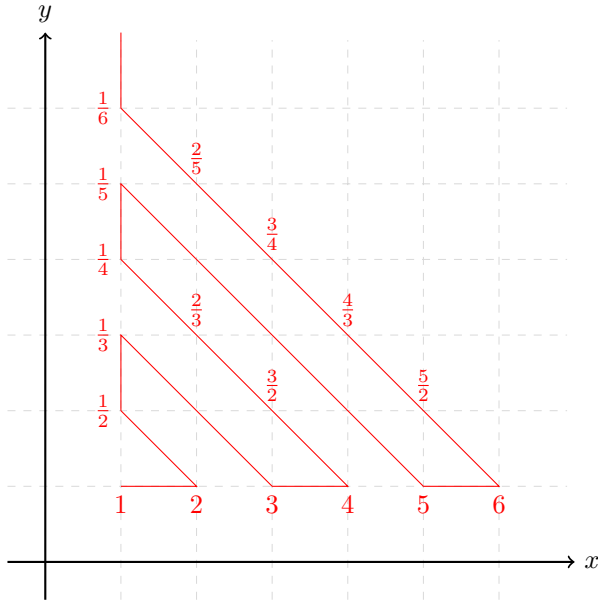


**Satz 2.43** (Abzählbarkeit).  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Q}$  sind abzählbar,  $\mathbb{R}$  ist überabzählbar.

$\mathbb{Z}$  Abzählbar.  $\mathbb{Z}$  ist abzählbar, weil  $\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  mit  $z_n = \frac{1}{2}n$  für  $n$  gerade und  $z_n = \frac{1}{2}(1-n)$  für  $n$  ungerade ist eine Abzählung von  $\mathbb{Z}$ .  $\square$

$\mathbb{Q}$  Abzählbar. Argumentation nach Cantor

$$p \in \mathbb{Q}, q = \frac{n}{m}$$



Hier werden Punkte ausgelassen, für die  $n$  und  $n$  nicht teilerfremd sind. Die Gitterpunkte werden durchnummeriert  $\implies \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3, \dots\}$ .  $\square$

$\mathbb{R}$  ist überabzählbar. Wir zeigen, dass  $[0, 1)$  nicht abzählbar ist.

Angenommen:  $[0, 1)$  ist abzählbar, dann sei  $\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  eine Abzählung, z.B.:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0, d_{11}d_{12}d_{13} \dots \\ z_2 &= 0, d_{21}d_{22}d_{23} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dann Zahl  $y := 0, d_1d_2d_3, \dots$  mit

$$d_n := \begin{cases} 2 & \text{falls } d_{nn} = 1 \\ 1 & \text{falls } d_{nn} \neq 1 \end{cases}$$

liegt in  $[0, 1)$ ,  $d_i \neq 9 \forall i$ , aber  $y \notin \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , denn falls  $y = z_k$  für ein  $k \implies$

$$y = 0, d_{k1}, d_{k2}, d_{k3}, \dots, d_{kk}, \dots$$

aber  $d_k \neq d_{kk}$  nach Konstruktion.  $\square$

## 2.6 Die Komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{z = (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Addition in  $\mathbb{C}$ :  $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ ,  $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ :

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Multiplikation in  $\mathbb{C}$ :

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

**Satz 2.44** ( $\mathbb{C}$  ist ein Körper). Körperaxiome gelten (nachrechnen!)

Nullelement  $0 := (0, 0)$

Einselement  $1 := (1, 0)$

Imaginäre Einheit  $i := (0, 1)$  mit  $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$

Inverse der Addition  $-z := (-x, -y)$

Inverse der Multiplikation  $z^{-1} := \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$

Schreibweise / Normaldarstellung

$z = (x, y)$  oder  $z = x + iy$  mit  $i^2 = -1$ .

**Bemerkung 2.45** (Rechnen in  $\mathbb{C}$ ).

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + i^2y_1y_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2).$$

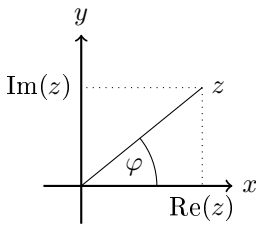
**Definition 2.46.** Für  $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$  heißt

$x = \operatorname{Re}(z)$  Realteil von  $z$

$y = \operatorname{Im}(z)$  Imaginärteil von  $z$

$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$  Betrag von  $z$

$\bar{z} := x - iy = (x, -y)$  zu  $z$  konjugierte komplexe Zahl



$$\operatorname{Re}(z) = |z| \cos(\varphi)$$

$$\operatorname{Im}(z) = |z| \sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi} \text{ mit } r = |z|.$$

**Bemerkung 2.47.** Rechenregeln für komplexe Zahlen

1.  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ,  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ ,  $\overline{\bar{z}} = z$
2.  $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ ,  $\operatorname{Im}(z) = \frac{i}{2}(z - \bar{z})$
3.  $|z| \geq 0$  und  $|z| = 0 \iff z = 0$
4.  $|\bar{z}| = |z|$
5.  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
6.  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ,  $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

Reelle Zahlen:  $z \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}(z) = 0 \iff z = \bar{z}$

Dies führt zur weiteren Darstellung komplexer Zahlen mit Hilfe von sin und cos.

### Polardarstellung

(a)

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad r = |z|.$$

$$\text{Bsp.: } i = 1 \cdot \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

(b) Definiere  $e^{iy} := \cos y + i \sin y$   $y \in \mathbb{R}$ . Es folgt eine *Exponentialdarstellung*.

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \text{ mit } r = |z| \quad \varphi = \operatorname{Arg}(z).$$

**Satz 2.48** (Vorteil der Exponentialdarstellung). Für  $z = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$$z_k = r_k e^{i\varphi_k} \quad k = 1, 2 \text{ gilt.}$$

(a)  $\bar{z} = r \cdot e^{-i\varphi}$

(b)  $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

(c)  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

(d)  $z^n = r^n e^{in\varphi}$

insbesondere gilt die Formel von de Moivre:

$$(e^{i\varphi})^n = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) = e^{in\varphi}.$$

*Beweis.* (a)  $\bar{z} = \overline{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = r(\cos \varphi - i \sin \varphi) = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)) = r \cdot e^{-i\varphi}$

(b)

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i((\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \end{aligned}$$

(c) folgt aus 2

(d) folgt aus 2

□

tolle Grafik von der Kostina, die gibt's nur in der Vollversion.

**Bemerkung 2.49** (Beobachtungen). 1.  $e^{i\varphi} = 1 \iff \varphi \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

*Beweis.* durch Behauptung.

□

2.  $e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2} \iff \varphi_1 - \varphi_2 \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

**Satz 2.50** ( $n$ -te Wurzel in  $\mathbb{C}$ ). Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $0 \neq w = re^{i\varphi}$  hat die Gleichung  $z^n = w$  genau  $n$  verschiedene Lösungen.

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\varphi + 2\pi k) \cdot \frac{1}{n}} \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

*Beweis.* Sei  $z = \rho e^{i\psi}$ . Dann:

$$\begin{aligned} z^n &= \rho^n e^{in\psi} \stackrel{!}{=} re^{i\varphi} = w \\ \iff \rho^n &= r \text{ und } n\psi = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \iff \rho &= \sqrt[n]{r} \text{ und } \psi = \frac{1}{n}(\varphi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Betrachte:  $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\psi_k}, \psi_k = \frac{1}{n}(\varphi + 2\pi k), k = 0, 1, \dots, n-1$

1. Alle  $z_k$  sind paarweise verschieden (klar).

2. Wir zeigen, dass es keine weiteren Lösungen gibt. Sei  $z$  eine beliebige Lösung  $z^n = w$  und  $z = |z| \cdot (\cos \psi + i \sin \psi)$ . Es gilt  $|z|^n = |w|$  und folglich  $|z| = \sqrt[n]{|w|} = \sqrt[n]{r}$ .

Weiterhin ist  $n\psi = \varphi + 2\pi l$  für ein  $l \in \mathbb{Z}$  (wegen  $(e^{i\psi})^n = e^{in\psi}$ ), dann  $\psi = \frac{\varphi}{n} + l \frac{2\pi}{n}$ .

Teile  $l$  durch  $n$  mit Rest:  $l = k + s \cdot n$ .

$$\frac{l}{n} = s + \frac{k}{n}, s \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n-1.$$

Dann

$$\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}(k + sn) = \underbrace{\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)}_{\psi_k} + 2\pi s.$$

$\implies z = z_k, 0 \leq k \leq n-1$   
 $\implies$  Alle Lösungen gefunden

□

**Bemerkung 2.51** (Geometrische Interpretation). Die Lösungen sind die Ecken eines regelmäßigen  $n$ -Ecks auf dem Kreis mit Radius  $|z| = \sqrt[n]{r}$ .

Im Fall  $w = 1$  heißen  $z_k$  die  $n$ -ten Einheitswurzeln.

**Beispiel 2.52.** Die dritten Einheitswurzeln sind

$$\begin{aligned} & \left\{ e^{i2k\pi\frac{1}{3}}, k = 0, 1, 2 \right\} \\ &= \left\{ \cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(k\frac{2\pi}{3}\right), k = 0, 1, 2 \right\} \\ &= \left\{ 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}. \end{aligned}$$

## 3 Folgen und Reihen

### 3.1 Folgen

Eine Zahlenfolge ist eine Abbildung von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{R}$ , d.h.  $n \mapsto a_n \in \mathbb{R}$ .

Teilfolge:  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wobei  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge natürlicher Zahlen, welche streng monoton wächst, d.h.  $n_1 < n_2 < \dots$  bzw.  $n_k < n_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$

**Beispiel 3.1.**  $(-1)^n$  hat zwei Teilfolgen:  $(-1)^{2n} = 1$  und  $(-1)^{2n+1} = -1$ .

**Definition 3.2** (Konvergenz, Beschränktheit, Monotonie von Folgen). 1. Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$  heißt *beschränkt*, wenn es eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$  gibt mit  $|a_n| \leq C$ .

Sie heißt nach oben (bzw. unten) beschränkt falls  $\exists C \in \mathbb{R}$ , s.d.  $a_n \leq C$  (bzw.  $a_n \geq C$ )  $\forall n \in \mathbb{N}$

2.  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt monoton wachsend (fallend), wenn  $a_n \leq a_{n+1}$  ( $a_n \geq a_{n+1}$ )  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

3.  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt konvergent gegen  $a \in \mathbb{R}$ , wenn  $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ , s.d.

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon.$$

4.  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt divergent, falls sie gegen keine reelle Zahl konvergiert.

**Bemerkung 3.3.** 1. Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $a \in \mathbb{R}$  falls in jeder  $\epsilon$ -Umgebung  $]a - \epsilon, a + \epsilon[$  fast alle Folgeelemente liegen.

2. In Def. kann auch  $\leq \epsilon$  und statt  $\epsilon$  kann man  $\frac{1}{N}$  für beliebig große  $N \in \mathbb{N}$  schreiben.

**Satz 3.4.** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$  ist genau dann konvergent, wenn sie Cauchy-Folge ist, d.h.  $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ , s.d.  $\forall n, m \geq n_\epsilon$  gilt:  $|a_n - a_m| < \epsilon$ .

**Satz 3.5** (Eindeutigkeit des Limes). Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  und  $a, a' \in \mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a'$ , dann gilt  $a = a'$ .

*Beweis.* Angenommen  $a \neq a'$ . Definiere  $\epsilon := \frac{|a-a'|}{2} > 0$ .

Dann  $\exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq n_1$  und  $|a_n - a'| < \epsilon \quad \forall n \geq n_2$ .

Dann  $\forall n \geq \max\{n_1, n_2\}$  gilt:

$$|a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < \epsilon + \epsilon = |a - a'|.$$

$$\implies |a - a'| < |a - a'|. \text{ Widerspruch } \implies a = a'$$

□

**Satz 3.6.** Konvergente Folgen sind beschränkt.

*Beweis.* Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty, a \in \mathbb{R}$ .

Wähle  $\epsilon = 1$ . Dann  $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < 1 \quad \forall n \geq n_\epsilon$ .

Dann gilt  $\forall n \geq n_\epsilon$ :

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|.$$

$$\implies |a_n| \leq \left( \max_{k=1, \dots, n_\epsilon} |a_k| \right) + |a| + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

**Satz 3.7** (Konvergenz und Nullfolgen). Eine Nullfolge ist eine Folge, die gegen Null konvergiert. Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

Dann sind äquivalent:

1.  $a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty$
2.  $(a_n - a) \rightarrow 0$
3.  $|a_n - a| \rightarrow 0$

*Beweis.* durch Behauptung.

□

**Satz 3.8** (Konvergenz von Teilfolgen). Teilfolgen einer gegen  $a \in \mathbb{R}$  konvergierenden Folge konvergieren ebenfalls gegen  $a \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* trivial.

□

**Satz 3.9** (Einschließungskriterium (Sandwich)). Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folgen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ .

1. Falls  $a_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies a \leq c$ .
2. Falls  $a = c$  und  $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies b = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$

*Beweis.* Sei  $\epsilon > 0$ .

1.  $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$  und  $|c_n - c| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq n_\epsilon$ .

$$\text{Dann: } a - c \leq a - (a_n - c_n) - c \leq |a - a_n| + |c_n - c| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon$$

$$\implies \forall \epsilon > 0 \text{ gilt } a - c < \epsilon \implies a - c \leq 0$$

2.  $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < \epsilon$  und  $|c_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon$

Dann gilt  $\forall n \geq n_\epsilon$  und wegen  $|a_n| \leq |b_n| \leq |c_n|$ :

$$-\epsilon < -|a_n - a| \leq a_n - a \leq b_n - a \leq c_n - a \leq |c_n - a| < \epsilon.$$

$$\implies -\epsilon < b_n - a < \epsilon \implies |b_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$$

□

**Satz 3.10** (Rechenregeln für konvergente Folgen). Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Dann gilt:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda a + \mu b \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$
4. Falls  $b \neq 0$ , gilt  $b_n \neq 0$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ .
5. Falls  $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies a \geq 0$  und  $(a_n)^{\frac{1}{k}} \rightarrow a^{\frac{1}{k}}, n \rightarrow \infty$ .

*Beweis.* durch Zurückblättern.

□

**Satz 3.11** (monoton + beschränkt  $\implies$  konvergent). Eine monoton wachsende (fallende) nach oben (unten) beschränkte Folge konvergiert gegen ihr Supremum:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\} = \min\{c \in \mathbb{R} | a_n \leq c\}.$$

bzw. ihr Infimum:

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n := \inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\} = \max\{c \in \mathbb{R} | a_n \geq c\}.$$

*Beweis.* Gegeben  $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Definiere  $s := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ .

Z.z.:  $a_n \rightarrow s$ . Sei  $\epsilon > 0$ . Dann  $s - \epsilon$  keine obere Schranke, d.h.  $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$  mit  $s - \epsilon < a_{n_\epsilon}$ .

Damit  $s - \epsilon < a_{n_\epsilon} \leq a_n \leq s < s + \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon$

$$\implies |a_n - s| < \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon \implies a_n \rightarrow s$$

□

**Satz 3.12** (Bolzano-Weierstraß). Jede beschränkte Folge besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge.

*Beweis.* Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt, d.h.  $\exists a, b \in \mathbb{R}$ , s.d.  $a \leq a_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Konstruiere induktiv eine Folge von abgeschlossenen Intervallen  $I_k := [a_k, b_k]$  mit:

- (1)  $I_k$  enthält unendlich viele Folgeelemente von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- (2)  $I_k \subset I_{k-1} \quad \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2$
- (3)  $(b_k - a_k) \leq 2^{1-k}(b_1 - a_1) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Für  $k = 1$  wähle  $a_1 := a, b_1 := b$ .

$k \rightarrow k + 1$  : Intervall  $I_k := [a_k, b_k]$  mit Eigenschaften (1)-(3) sei konstruiert.

Berechne  $M := \frac{a_k + b_k}{2}$  (Mitte des Intervalls  $I_k$ ). Wegen (1):  $[a_k, M]$  oder  $[M, b_k]$  enthält unendlich viele Folgeelemente.

Setze:

$$I_{k+1} := \begin{cases} [a_k, M] & \text{falls } [a_k, M] \text{ unendlich viele Folgelemente enthält} \\ [M, b_k] & \text{falls } [M, b_k] \text{ unendlich viele Folgelemente enthält} \end{cases}$$

in beiden Fällen:

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2} \stackrel{(3)}{\leq} \frac{1}{2} 2^{1-k} (b_1 - a_1) = 2^{-k} (b_1 - a_1).$$

$\implies$  (1) - (3) erfüllt für  $I_{k+1}$ .

Wir definieren eine Teilfolge  $(a_{n_k})$  mit  $a_{n_k} \in I_k \ \forall k \in \mathbb{N}$ :

$k = 1$  : Setze  $a_{n_1} := a, n_1 := 1$ .

$k \rightarrow k+1$  : Wegen (1) ex. ein Index  $n_{k+1} > n_k$  mit  $a_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$ .

$I_k$  bilden eine Intervallschachtelung:

$$\implies \underbrace{a_k}_{\rightarrow a} \leq a_{n_k} \leq \underbrace{b_k}_{\rightarrow a} \stackrel{\text{Sandwich}}{\implies} a_{n_k} \rightarrow a, k \rightarrow \infty.$$

□

**Beispiel 3.13.**  $a_n = (-1)^n$ . Teilfolge:  $(1, 1, 1, 1, \dots) \rightarrow 1, (-1, -1, -1, \dots) \rightarrow -1$ .

**Definition 3.14** (Häufungspunkt). Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ . Dann heißt  $a \in \mathbb{R}$  Häufungspunkt der Folge, falls  $\forall \epsilon > 0$  gilt  $|a_n - a| < \epsilon$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ .

**Beispiel 3.15.** 1.  $a_n = (-1)^n$  hat zwei Häufungspunkte 1 und -1.

2. Falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , dann ist  $a$  Häufungspunkt von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Bemerkung 3.16.** Zu jedem Häufungspunkt  $a$  ex. eine Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die gegen  $a$  konvergiert, also  $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$ :

$$a \text{ Häufungspunkt} \iff a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \text{ für eine } (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}.$$

*Beweis.* (i) „ $\implies$ “: Sei  $a$  Häufungspunkt (HP). Wähle  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit  $a_{n_1} \in D_1(a) = \{x \mid |x - a| < 1\}$ .

Sei  $n_1, \dots, n_{k-1}$  bereits gewählt.

Wähle  $n_k > n_{k-1}$ , s.d. gilt:

$$a_{n_k} \in D_{\frac{1}{k}}(a) = \left\{ x \mid |x - a| < \frac{1}{k} \right\}.$$

Dann ist  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge,  $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$ .

$\implies a_{n_k} \rightarrow a, k \rightarrow \infty$ .

(ii) „ $\impliedby$ “: Sei  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ .

Zu zeigen:  $a$  ist HP.

Sei  $\epsilon > 0$ . Dann ex.  $k_\epsilon \in \mathbb{N}$ , s.d.  $\forall k \geq k_\epsilon$  gilt:

$$|a_{n_k} - a| < \epsilon \implies \forall k \geq k_\epsilon \quad a_{n_k} \in D_\epsilon(a).$$

□

**Bemerkung 3.17.** Satz von Bolzano-Weierstraß besagt, dass jede beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$  mindestens einen HP besitzt.

**Definition 3.18** (Limes Superior). Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ . Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nach oben beschränkt, dann definiere eine reelle Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  durch  $s_n := \sup\{a_k \mid k \geq n\}$ .

$(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist monoton fallend. Ist  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nach unten beschränkt, dann definiere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{a_k \mid k \geq n\}.$$

Falls  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht nach oben beschränkt ist, setze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n := +\infty$ .

Falls  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nach oben beschränkt, aber  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  *nicht* nach unten beschränkt ist, setze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n := -\infty$ .

**Beispiel 3.19.** 1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n = a$ .

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \sup (-1)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{(-1)^k \mid k \geq n\} = 1$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \sup n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup (-n) = -\infty$$

**Definition 3.20** (Limes Inferior). Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen. Dann setze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n := - \lim_{n \rightarrow \infty} \sup (-a_n).$$

**Beispiel 3.21.** 1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup (n^2) = +\infty$   
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf (n^2) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{-k^2 \mid k \geq n\} = - \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) = +\infty$

2.

$$a_n := \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

$$(a_n) = (0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n = +\infty$$

**Satz 3.22** (Charakterisierung von  $\limsup$  und  $\liminf$ ). Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n = a \in \mathbb{R} \iff$$

$\forall \epsilon > 0$  gilt:

(i)  $a_n < a + \epsilon$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ .

(ii)  $a_n > a - \epsilon$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ .

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n = a \in \mathbb{R} \iff$$

$\forall \epsilon > 0$  gilt:

(i)  $a_n > a - \epsilon$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$

(ii)  $a_n < a + \epsilon$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ .

3.  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist genau dann konvergent, wenn:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n = a \in \mathbb{R}.$$

In diesem Fall gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

**Bemerkung 3.23.** Satz 3.22 impliziert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n = \sup \{\text{HP von } (a_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n = \inf \{\text{HP von } (a_n)_{n \in \mathbb{N}}\}.$$

$\forall \epsilon > 0$  liegen unendlich viele Folgeelemente im offenen Intervall

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n \right) - \epsilon < a_n < \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n \right) + \epsilon \quad (1 \text{ (i) (ii)}).$$

bzw.

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n \right) - \epsilon < a_n < \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n \right) + \epsilon \quad (2 \text{ (i) (ii)}).$$

Fast alle Folgeelemente erfüllen:

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n \right) - \epsilon < a_n < \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n \right) + \epsilon \quad (1 \text{ (i) und } 2 \text{ (i)}).$$



### 3.2 Konvergenz in $\mathbb{C}$

Eine Folge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  komplexer Zahlen ( $z_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ) konvergiert gegen  $z \in \mathbb{C}$ , falls  $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ , s.d.  $|z_n - z| < \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon$

Genauso wird die Beschränktheit und Begriff der C.F. übertragen.

Aus Definitionen:

$$|z| := \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2}.$$

und der Ungleichung:

$$\max(|x|, |y|) \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

folgt:

1.  $z_n \rightarrow z, n \rightarrow \infty$  in  $\mathbb{C} \iff \operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(z)$  und  $\operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(z)$
2.  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine C.F. in  $\mathbb{C} \iff$   
 $(\operatorname{Re}(z_n))_n$  und  $(\operatorname{Im}(z_n))_n$  sind C.F. in  $\mathbb{R}$
3.  $\mathbb{C}$  ist vollständig, d.h. jede C.F. in  $\mathbb{C}$  ist konvergent.
4. Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{C}$  besitzt eine konvergente Teilfolge.

**Beispiel 3.24.** 1.  $\frac{1+i(n+1)}{n} = \frac{1}{n} + i\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow i, n \rightarrow \infty$

$$2. \quad z_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n = \left(\frac{i}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{i}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right)$$

$$|z_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

$$3. \quad q^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \quad \forall q \in \mathbb{C} \text{ mit } |q| < 1.$$

### 3.3 Unendliche Summe („Reihen“)

**Definition 3.25.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. Wir betrachten die Folge der  $n$ -ten Partialsumme  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definiert durch:

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k.$$

Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergiert (divergiert), wenn die Folge der Partialsummen  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert (divergiert).

Im Fall von Konvergenz bezeichnet:

$$s_{\infty} := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

die Summe oder den Wert der Reihe.

**Bemerkung 3.26.** Man kann auch Reihen  $\sum_{k=l}^{\infty} a_k$  mit  $l \in \mathbb{Z}$  betrachten.

**Beispiel 3.27** (Geometrische Reihe).

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  konvergiert genau für alle  $q \in \mathbb{C}$  mit  $|q| < 1$  und es gilt  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ .

*Beweis.* Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}.$$

Für  $|q| < 1$  gilt  $|q|^{n+1} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

$$\implies s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \rightarrow \frac{1}{1 - q} \quad \text{für } |q| < 1.$$

Bleibt zu zeigen:  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  divergent für  $|q| \geq 1$ .

Angenommen  $\exists q \in \mathbb{C}$  mit  $|q| \geq 1$  und  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert.

Dann

$$|q|^{n+1} = \underbrace{|s_{n+1} - s_n|}_{\rightarrow s_*}.$$

Widerspruch, da  $|q|^{n+1} \geq 1$  für  $|q| \geq 1$  □

**Lemma 3.28.** Ist  $\sum_k^{\infty} a_k$  konvergent, dann ist  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge.

*Beweis.*  $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n \rightarrow s_{\infty} - s_{\infty} = 0, n \rightarrow \infty$  □

**Bemerkung 3.29.** Die Eigenschaft von  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge zu sein, reicht nicht für die Konvergenz von  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  aus!

**Beispiel 3.30** (Harmonische Reihe).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{ist strikt divergent.}$$

*Beweis.* Folge der Partialsummen ist unbeschränkt:

$$\begin{aligned} S_{2^m} &= \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} \\ &= \underbrace{\frac{1}{1}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^m}}_{\geq 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2}} \geq \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

□

**Beispiel 3.31.**

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k.$$

a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + \dots = 0.$$

b)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 = 1$$

c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}.$$

Alles Falsch (Kostina: „Alles Schrot!“), weil  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$  divergent.

### 3.3.1 Konvergenzkriterien

Die Konvergenz einer Reihe ist nichts anderes als die Konvergenz der Folge der Partialsummen.

**Satz 3.32.** 1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_{\infty} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = b_{\infty}.$$

 $\implies$ 

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda a_{\infty} + \mu b_{\infty} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

2. Ist  $a_k \in \mathbb{R}$  mit  $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$  dann gilt:  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergent  $\iff (\sum_{k=1}^n a_k)_{n \in \mathbb{N}}$  nach oben beschränkt.

*Beweis.* (1) folgt aus der linearen Kombination von Folgen.

(2) Falls  $a_k \geq 0 \implies$  Folge  $(\sum_{k=1}^n a_k)_{n \in \mathbb{N}}$  ist monoton wachsend.

Für solche Folgen gilt: Konvergenz  $\iff$  Beschränktheit □

**Satz 3.33** (Leibniz-Kriterium). Ist  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende reelle Nullfolge, so ist die alternierende Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$$

konvergent mit folgender Abschätzung:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leq |a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Beweis.* Aus Voraussetzungen:  $a_k \geq 0, s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ .

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1} \stackrel{a_{2n} \geq a_{2n+1}}{\geq} s_{2n-1}.$$

Folge mit ungeraden Indizes:  $s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \dots$

$$s_{2n} = s_{2n-2} - a_{2n-1} + a_{2n} \leq s_{2n-2}.$$

Folge mit geraden Indizes:  $\dots \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0$

$$s_{2n} > s_{2n+1} \quad (s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1})$$

$$s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

$$s_1 \geq s_3 \leq s_5 \leq \dots \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0$$

$\implies [s_{2n+1}, s_{2n}]$  bilden eine Intervallschachtelung, d.h.

$$\exists s_{\infty} = \bigcap_{k=1}^{\infty} [s_{2k+1}, s_{2k}].$$

$$s_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n}$$

$$s_{2n+1} \leq s_{\infty} \leq s_{2n}.$$

Damit gilt  $\forall k \in \mathbb{N}$ :

$$0 \leq s_{\infty} - s_{2n+1} \leq s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1}.$$

und

$$0 \geq s_{\infty} - s_{2n} \geq s_{2n+1} - s_{2n} = -a_{2n+1} \geq -a_{2n}.$$

$\implies$

$$0 \leq |s_{\infty} - s_n| \leq a_n \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty.$$

und

$$\left| \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}_{s_{\infty}} - \sum_{k=1}^n a_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leq a_n.$$

□

**Beispiel 3.34** („Alternierende harmonische Reihe“).

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

ist konvergent

**Definition 3.35.** Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  heißt absolut konvergent falls  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konvergiert.

**Beispiel 3.36.** Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  ist konvergent nach Leibniz Kriterium, aber nicht absolut konvergent, weil  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergiert.

**Satz 3.37.** Aus absoluter Konvergenz einer Reihe folgt deren Konvergenz.

*Beweis.* Sei  $\sum_k a_k$  absolut konvergent, d.h.  $\sum_k |a_k|$  konvergiert.

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k, t_n := \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

Dann gilt für  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq n$ .

$$|s_m - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| = t_m - t_n = |t_m - t_n|.$$

Da  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert  $\implies (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist C.F.

Aus  $|s_m - s_n| \leq |t_m - t_n| < \epsilon$

$\implies (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist auch C.F. in  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$

$\implies \sum_k a_k$  konvergiert.

□

**Satz 3.38** (Majoranten Kriterium). Es sei  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  eine reelle Reihe ( $b_n \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$ ).

(i) Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergent und gilt  $|a_n| \leq b_n$  ( $a_n \in \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{R}$ ) für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  (d.h.  $\forall n \geq N_0$ ), so ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergent.

Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  heißt Majorante der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

(ii) Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergent und  $a_n \in \mathbb{R}$  mit  $a_n \geq |b_n|$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ , so ist die reelle Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergent. Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  heißt Minorante der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

*Beweis.* (i)  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}, (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Partialsummen von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Dann

$$|s_n - s_m| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^n b_k = |t_n - t_m|.$$

$\implies (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist C.F.

$\implies (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert.

(ii) Ann.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert  $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergente Majorante zu  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergiert. Widerspruch.

□

**Beispiel 3.39.** 1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$ .

$$2^n = (1+1)^n \geq 1+n \quad \forall n \implies \frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{1+n} < 1 \quad \forall n.$$

$\implies$

$$\frac{n}{4^n} \leq \frac{n}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^n} \quad \forall n.$$

$\implies \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$  konvergente Majorante für  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$ .

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  ist divergent, weil  $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$  ( $\sqrt{n} \geq 1$ )  $\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergente Minorante.

**Satz 3.40** (Quotientenkriterium). Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $|a_n| \neq 0$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  ( $a_n \in \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{R}$ ).

(i) Falls ein  $0 < q < 1$  existiert mit

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0,$$

dann ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergent.

(ii) Falls  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1 \quad \forall n \geq N_0$ , so ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergent.

Kostina glaubt, dass das so stimmt, aber offensichtlich ist sie sich nicht sicher.

*Beweis.* (i)  $\forall n \geq N_0$  gilt:

$$|a_n| \leq q|a_{n-1}| \leq \dots \leq q^{n-N_0}|a_{N_0}|.$$

$\implies \frac{|a_{N_0}|}{q^{N_0}} \sum_{n=1}^{\infty} q^n$  ist konvergente Majorante.

(ii)  $|a_n| \geq |a_{n-1}| \geq \dots \geq |a_N| \implies (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  keine Nullfolge  $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergiert.

□

**Beispiel 3.41** (Exponentialreihe).  $\forall z \in \mathbb{C}$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} =: \exp(z) \text{ oder } e^z.$$

Zahl  $e := \exp(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!}$  absolut konvergent, für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

$$a_n := \frac{z^n}{n!} \implies \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|z|^n}{n!}} = \frac{|z|}{n+1}.$$

Für  $n \geq 2|z|$  gilt:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|z|}{n+1} \leq \frac{1}{2} =: q < 1.$$

**Satz 3.42** (Wurzelkriterium). Es sei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  eine Reihe ( $a_n \in \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ).

(i) Falls  $\exists \quad 0 < q < 1$  und  $N_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \quad \forall n \geq N_0,$$

so ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergent.

(ii) Falls  $\exists N_0$  mit  $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \quad \forall n \geq N_0$ , so ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergent.

*Beweis.* 1. Für  $n \geq N_0$  ist  $|a_n| \leq q^n \implies$  konvergente Majorante

2.  $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \implies |a_n| \geq 1 \implies (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  keine Nullfolge  $\implies$  Divergenz.

□

**Bemerkung 3.43.** Im Quotientenkriterium und Wurzelkriterium wird gefordert:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \text{ bzw. } \sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1.$$

Die Forderung  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$  bzw.  $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$  reicht nicht: Bsp.:  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  divergent.

**Satz 3.44** (Verdichtungskriterium von Cauchy). Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $a_n \in \mathbb{R}_+$ , eine reelle, positive monoton fallende Nullfolge. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \iff \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ konvergent}.$$

*Beweis.* durch Übung.

□

**Beispiel 3.45.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

1.  $\alpha \leq 0$ :  $(\frac{1}{n^\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$  keine Nullfolge  $\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  divergent.

2.  $\alpha > 0$ :

$$\left( \frac{1}{n^\alpha} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

eine monoton fallende Nullfolge mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(2^{1-\alpha})^k}_{=:q} = \sum_{k=1}^{\infty} q^k.$$

mit  $q = 2^{1-\alpha}$

Falls  $|q| < 1 \iff$  konvergenz

d.h.  $\alpha > 1 \iff$  konvergenz

### 3.4 Umordnen von Reihen

**Definition 3.46** (Umordnung). Sei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  eine Reihe und  $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine bijektive Abbildung.

Dann heißt  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = a_{\tau(1)} + a_{\tau(2)} + \dots$  eine Umordnung der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**Beispiel 3.47.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \text{ konvergiert.}$$

Umordnung:

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}}_{> 4 \cdot \frac{1}{15} > \frac{1}{4}} - \frac{1}{8} \\ & + \dots + \underbrace{\left( \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+3} + \dots + \frac{1}{2^n+2^n-1} \right)}_{> 2^{n-1} \frac{1}{2^{n+1}-1} > \frac{1}{4}} - \frac{1}{2n+2}. \end{aligned}$$

divergiert!

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  konvergent, aber nicht absolut konvergent, deshalb kann eine Umordnung die Konvergenzeigenschaften drastisch ändern !!!

**Satz 3.48** (Umordnungssatz). Sei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  eine absolut konvergente Reihe.

Dann konvergiert jede Umordnung dieser Reihe absolut gegen denselben Grenzwert.

*Beweis.* Forster. □

**Bemerkung 3.49.** Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  eine reelle Reihe, welche konvergiert, aber nicht absolut, so gibt es zu jedem  $c \in \mathbb{R}$  oder  $c = \pm\infty$  eine Umordnung  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ , welche gegen  $c \in \mathbb{R}$  konvergiert (oder divergiert).

### 3.5 Das Cauchy-Produkt von Reihen

**Satz 3.50** (Cauchy-Produkt). Seien  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  absolut konvergente Reihen. Für  $n \in \mathbb{N}_0$  sei  $c_n$  definiert durch

$$c_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0.$$

Dann ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  absolut konvergent mit  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n) (\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$

*Beweis.* Forster. □

**Bemerkung 3.51.** Die Voraussetzung der absoluten Konvergenz ist wichtig:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ mit } a_n := b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

konvergieren, aber ihr Cauchy-Produkt:

$$c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

divergiert

*Beweis.* durch Übung. □

**Beispiel 3.52.** Für  $x, y \in \mathbb{C}$  gilt

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

*Beweis.*

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}.$$

Bilde Cauchy-Produkt

$$\begin{aligned} c_n &:= \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} (x+y)^n. \end{aligned}$$

□

**Korrolar 3.53.** (i)  $\forall z \in \mathbb{C}$  gilt  $(\exp(z))^{-1} = \exp(-z)$

(ii)  $\forall x \in \mathbb{R}$  gilt  $\exp(x) > 0$

(iii)  $\forall n \in \mathbb{Z}$  ist

$$\exp(n) = e^n = \begin{cases} e \cdot e \cdot \dots \cdot e & n > 0 \\ e^{-1} \cdot e^{-1} \cdot \dots \cdot e^{-1} & n < 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

*Beweis.* (i)  $\exp(-z) \cdot \exp(z) = \exp(-z + z) = \exp(0) = 1$

(ii) Für  $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$  ist  $\exp(x) = 1 + x + \dots > 0$

Für  $x < 0$  ist  $(\exp(x))^{-1} = (\exp(-x)) > 0 \implies \exp(x) > 0$ .

(iii) Zz.:  $\exp(n) = e^n \forall n \in \mathbb{N}$

Vollständige Induktion:

$n = 1$  :  $\exp(1) = e$  nach Definition

$n \rightarrow n + 1$  :  $\exp(n + 1) = \exp(n) \cdot \exp(1) = e^n \cdot e = e^{n+1}$

Für  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $n < 0$  gilt:

$(\exp(n))^{-1} = \exp(-n) = e^{-n} \implies \exp(n) = e^n$

□

### 3.6 Potenzreihen

**Definition 3.54.** Eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt  $z_0 \in \mathbb{C}$  ist definiert durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, z \in \mathbb{C}.$$

$$a_n \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

**Beispiel 3.55** (Exponentialreihe).  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$  mit Entwicklungspunkt  $0 \in \mathbb{C}$  konvergiert für  $\forall z \in \mathbb{C}$ .

**Definition 3.56** (Konvergenzradius). Zur Potenzreihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  definiere den Konvergenzradius  $\rho$  durch

$$\rho := \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

**Satz 3.57.** (i)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  konvergiert absolut  $\forall z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| < \rho$

(ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  divergiert für  $\forall z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| > \rho$

(iii) für  $|z - z_0| = \rho$  ist keine allgemeine Aussage möglich.

**Beispiel 3.58.** für Aussage (iii)

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} x^k}_{\text{divergent für } |x|=1} \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}}_{\text{div für } x=1, \text{ konv für } x=-1} \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}}_{\text{konvergent für } |x|=1}.$$

$\rho = 1$  für alle Reihen.

## 4 Funktionen und Stetigkeit



**Definition 4.1** (Funktion). Es sei  $D \subset \mathbb{R}$  eine nichtleere Teilmenge. Eine reellwertige oder komplexwertige Funktion auf  $D$  ist eine Abbildung:

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad f : D \rightarrow \mathbb{C}.$$

Für zwei Funktionen  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ ) definieren wir

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) := f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

.

## 4.1 Grenzwerte bei Funktionen

**Definition 4.2** (Berührpunkt). Sei  $D \subset \mathbb{R}$ . Ein Punkt  $a \in \mathbb{R}$  heißt Berührpunkt von  $D$ , falls in jeder  $\delta$ -Umgebung von  $a$ , d.h.

$$U_\delta(a) := ]a - \delta, a + \delta[ = (a - \delta, a + \delta).$$

mindestens ein Punkt von  $D$  liegt, d.h.

$$]a - \delta, a + \delta[ \cap D \neq \emptyset \quad \forall \delta > 0.$$

**Beispiel 4.3.** 1.  $a \in D \implies a$  Berührpunkt von  $D$

2.  $D = ]0, 1[$ , 0 ist Berührpunkt von  $D$ , denn  $\forall \delta > 0 \quad ]-\delta, \delta[ \cap ]0, 1[ \neq \emptyset$ , da  $\delta > 0$

3.  $D = [1, 2]$ , 0 ist kein Berührpunkt von  $D$ , denn z.B. für  $\delta = \frac{1}{2}$ :

$$]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \cap [1, 2] = \emptyset.$$

**Lemma 4.4** (Äquivalente Definition von Berührpunkten).  $a$  ist ein Berührpunkt von  $D \iff \exists$  Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

*Beweis.* durch Behauptung □

**Definition 4.5** (Grenzwert bei Funktionen). 1. Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$  und  $x_0$  sei ein Berührpunkt von  $D$ .  $f$  hat in  $x_0$  den Grenzwert (oder limes),  $y_0 \in \mathbb{R}$ , falls

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: |f(x) - y_0| < \epsilon \quad \forall x \in D, |x - x_0| < \delta.$$

Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0.$$

$y_0$  ist eindeutig bestimmt.

$y_0$  kann von  $D$  abhängig sein und man schreibt daher zur Verdeutlichung ein  $x \in D$  darunter.

2. Sei  $x_0$  ein Berührpunkt von  $D \cap ]x_0, \infty[$ . Dann hat  $f$  in  $x_0$  den rechtsseitigen Grenzwert  $y_0$  hat, falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x \in D \cap ]x_0, \infty[ f(x) = y_0.$$

Schreibweise

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = y_0$$

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = y_0.$$

3. Sei  $x_0$  ein Berührungspunkt von  $D \cap ]-\infty, x_0[$ . Dann hat  $f$  in  $x_0$  den linksseitigen Grenzwert  $y_0$ , falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x \in D \cap ]x_0, \infty[ f(x) = y_0.$$

Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = y_0$$

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = y_0.$$

**Beispiel 4.6** (Heaviside Funktion).  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , def. durch

$$H(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Für  $x_0 > 0$  gilt  $\lim_{x \rightarrow x_0} H(x) = 1$ .

*Beweis.* Sei  $\epsilon > 0$ , wähle  $\delta := \frac{x_0}{2} > 0$ . Dann gilt

$$|H(x) - 1| = 0 < \epsilon \quad \forall x \in \mathbb{R} \cap ]x_0 - \frac{x_0}{2}, x_0 + \frac{x_0}{2}[.$$

□

Analog finden wir, dass für  $x_0 < 0$  gilt  $\lim_{x \rightarrow x_0} H(x) = 0$ .

$\lim_{x \rightarrow 0} H(x)$  existiert nicht!

*Beweis.* Angenommen:  $\lim_{x \rightarrow 0} H(x) = y_0$ .

Dann wählen wir  $\epsilon = \frac{1}{4}$ , dann ex.  $\delta > 0$  mit

$$|H(x) - y_0| < \frac{1}{4} \quad \forall x \text{ mit } x \in ]-\delta, \delta[.$$

$$\implies 1 = |H(-\delta)| - H(\delta) \leq |H(-\delta) - y_0| + |y_0 - H(\delta)| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ Widerspruch!}$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow 0} H(x) \text{ existiert nicht.}$$

□

Es gibt  $\lim_{x \nearrow 0} H(x) = 0$  und  $\lim_{x \searrow 0} H(x) = 1$ , weil

$$|H(x) - 0| = 0 \quad \forall x \in ]-\delta, 0[$$

$$|H(x) - 1| = 0 \quad \forall x \in ]0, \delta[.$$

**Lemma 4.7** (Restgliedabschätzung der Exponentialreihe).

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} + R_{N+1}(x).$$

, d.h.

$$R_{n+1}(x) := \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Für  $R_{n+1}(x)$  gilt

$$|R_{n+1}(x)| \leq 2 \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}, \quad \forall |x| \leq \frac{N+2}{2}, N \in \mathbb{N}_0.$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
 |R_{n+1}(x)| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| = \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \left( 1 + \frac{|x|}{N+2} + \frac{|x|^2}{(N+2)(N+3)} + \dots \right) \\
 &\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \left( 1 + \frac{|x|}{N+2} + \left( \frac{|x|}{N+2} \right)^2 + \dots + \left( \frac{|x|}{N+2} \right)^3 + \dots \right) \\
 &\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) \\
 &= \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^k \\
 &= 2 \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}.
 \end{aligned}$$

□

**Beispiel 4.8.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \exp(x) = 1.$$

*Beweis.* Sei  $\epsilon > 0$ , wähle  $\delta := \frac{\epsilon}{4}$ . Dann gilt  $\forall x \in ]-\frac{\epsilon}{4}, \frac{\epsilon}{4}[$ , wobei O.B.d.A.  $\frac{\epsilon}{4} < 1$ , dass

$$|\exp(x) - 1| = |R_{0+1}| \leq 2 \cdot \frac{|x|^{0+1}}{(0+1)!} = 2|x| < 2 \cdot \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

□

**Lemma 4.9** (Folgenkriterium). Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$  und  $x_0$  ein Berührungspunkt von  $D$ . Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \iff \forall \text{ Folgen } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \text{ gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0.$$

*Beweis.* • „ $\implies$ “: Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .

Zu zeigen:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0$ . Sei also  $\epsilon > 0$ , nach Def. von  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert ein  $\delta > 0$ , s.d.

$$|f(x) - y_0| < \epsilon \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Zu  $\delta > 0$  ex. ein Index  $n_\delta \in \mathbb{N}$  mit  $|x_n - x_0| < \delta \quad \forall n \geq n_\delta$ .

$$\implies |f(x_n) - y_0| < \epsilon \quad \forall n \geq n_\delta$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0$$

• „ $\impliedby$ “: Zu zeigen.:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ , d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: |f(x) - y_0| < \epsilon \quad \forall x \in D: |x - x_0| < \delta.$$

Angenommen das gilt nicht.

Dann  $\exists \epsilon_0 > 0$ , s.d.  $\forall \delta > 0$  ein  $x \in D$  mit  $|x - x_0| < \delta$  und  $|f(x) - y_0| \geq \epsilon_0$ .

$\implies$  Für alle  $n \in \mathbb{N} \exists x_n \in D$  mit  $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$  und  $|f(x_n) - y_0| \geq \epsilon_0$

$\implies$  Diese  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definieren eine Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , aber  $|f(x_n) - y_0| \geq \epsilon_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\implies f(x_n)$  konvergiert nicht gegen  $y_0$ . Widerspruch!

$\implies$  Annahme ist falsch  $\implies$  Behauptung

□

## 4.2 Stetigkeit

**Definition 4.10** (Stetigkeit). Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , und  $a \in D$ .  $f$  heißt stetig im Punkt  $a$ , falls

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

$f$  heißt stetig in  $D$ , falls  $f$  stetig in  $a$  ist  $\forall a \in D$ .

Äquivalente Definitionen

**Definition 4.11** (Stetigkeit per  $\epsilon / \delta$  Argument).  $f$  ist stetig in  $a \iff$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ mit } |f(x) - f(a)| < \epsilon \quad \forall x \in D \text{ mit } |x - a| < \delta.$$

**Definition 4.12** (Stetigkeit mit Folgen).  $f$  ist stetig in  $a \iff$

$$\forall \text{ Folgen } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } D \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ gilt, dass } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$

**Definition 4.13** (Stetigkeit mit Bild).  $f$  ist stetig in  $a \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  s.d.

$$f(U_\delta(a)) \subset ]f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon[ = U_\epsilon(f(a)).$$

**Beispiel 4.14.** (1) Konstante Funktionen und die Identität sind auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig.

Konstante Fkt.: Wähle  $\delta$  beliebig, da

$$\forall x \in \mathbb{R}: |x - a| < \delta \implies 0 = |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Bei der Identität: Wähle  $\delta := \epsilon > 0$ , denn

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - a| < \delta = \epsilon \implies |f(x) - f(a)| = |x - a| < \epsilon.$$

(2)  $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig auf  $\mathbb{R}$ . Das folgt aus Rechenregeln für Folgen,

$$f(x_n) \rightarrow f(a), n \rightarrow \infty \implies |f(x_n)| \rightarrow |f(a)|.$$

(3)  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig auf ganz  $\mathbb{R}$ .

Sei  $a \in \mathbb{R}$ . Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = 0.$$

Aus  $\lim_{x \rightarrow 0} \exp(x) = 1$  folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n - a) = 1$

$$\implies \lim_{x \rightarrow a} \exp(x) = \lim_{x_n \rightarrow a} (\exp(a) + \exp(x_n - a)) = \exp(a) \cdot 1 = \exp(a).$$