Aufgabe	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1. Die Adjunkte zu A erhalten wir nach Berechnung zahlreicher Unterdeterminanten und lästigem Ausrechnen. Damit ergibt sich

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & -32 & -8 \\ 3 & 3 & -12 & -3 \\ 1 & 1 & -4 & -1 \\ -5 & -5 & 20 & 5 \end{pmatrix}.$$

Weiter folgt

$$A \cdot \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt mit der ersten Cramerschen Regel $\det(A) = 0$.

Aufgabe 2. (a)

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Permutationsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Permutationsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Beh.: siehe Aufgabe

Beweis. Sei $F := \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \sigma(i) = i\}$

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(\varphi(\sigma)) &= \sum_{i=1}^{n} \varphi(\sigma)_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(e_{\sigma(i)}\right)_i \\ &= \sum_{i=1, i \in F}^{n} (e_i)_i + \sum \{(e_j)_i \mid i \in \{1, \ldots, n\} \setminus F,\ j = \sigma(i) \implies j \neq i\} \\ &= \sum_{i=1, i \in F}^{n} 1 + \sum_{i=1, i \notin F}^{n} 0 = (\#F)_K. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3. Gesucht sind zunächst die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Mit

$$\lambda E_3 - A = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 & -6 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ 3 & 5 & \lambda + 5 \end{pmatrix}$$

gilt für die Determinante

$$\begin{aligned} \det(\lambda E_3 - A) &= (\lambda - 4)(\lambda - 3)(\lambda + 5) + 18(\lambda - 3) \\ &= (\lambda - 3)\left[\lambda^2 + \lambda - 2\right]. \end{aligned}$$

Diese Polynom hat die Nullstellen

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3.$$

Für λ_1 ergibt sich das homogene GLS

$$\begin{pmatrix} -3 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit folgt direkt

$$\ker(\lambda_1 E_3 - A) = \mathrm{Lin}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$$

Für λ_2 und λ_3 analog

$$\begin{aligned} \ker(\lambda_2 E_3 - A) &= \mathrm{Lin}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \\ \ker(\lambda_3 E_3 - A) &= \mathrm{Lin}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]. \end{aligned}$$

Aufgabe 4. (a) Beh.: $(-)^t$ ist linear.

Beweis. Seien $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{Q})$ und $\lambda \in Q$. Dann folgt direkt

$$(A + \lambda B)^t = A^t + (\lambda B)^t = A^t + \lambda B^t.$$

□

(b) Beh.: $\dim_{\mathbb{Q}}\left(\ker(\lambda \cdot \mathrm{id}_{M_{n,n}(\mathbb{Q})}) - (-)^t)\right) = \begin{cases} \frac{n^2+n}{2} & \lambda = 1 \\ \frac{n^2-n}{2} & \lambda = -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Beweis. Sei $A \in \ker(\lambda \cdot \mathrm{id}_{M_{n,n}(\mathbb{Q})}) - (-)^t)$. für ein $\lambda \in \mathbb{Q}$.
Falls $\lambda = 0 \implies A^t = 0 \implies A = 0 \implies \dim_{\mathbb{Q}}\left(\ker(\lambda \cdot \mathrm{id}_{M_{n,n}(\mathbb{Q})}) - (-)^t)\right) = 0$.
Sei $\lambda \neq 0$.

$$\lambda A - A^t = 0 \implies \lambda a_{ij} = a_{ji} \wedge \lambda a_{ji} = a_{ij} \implies \lambda^2 a_{ij} = a_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Für $A \neq 0$ gilt, es ex. mind. ein $a_{ij} \neq 0$. Für diese i und j gilt weiter

$$\lambda^2 = 1 \implies \lambda = \pm 1.$$

Für $\lambda \neq \pm 1 \implies A = 0 \implies \dim_{\mathbb{Q}}\left(\ker(\lambda \cdot \mathrm{id}_{M_{n,n}(\mathbb{Q})}) - (-)^t)\right) = 0$
Sei nun $\lambda = 1$. Dann ist $A = A^t$, also ist A symmetrisch. Damit bleiben n Diagonaleinträge frei und die Hälfte der restlichen Einträge, damit folgt:

$$\dim_{\mathbb{Q}}\left(\ker(\mathrm{id}_{M_{n,n}(\mathbb{Q})}) - (-)^t)\right) = n + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Für $\lambda = -1$ ist $A = -A^t$, also A antisymmetrisch. Damit sind alle Diagonaleinträge 0. Es folgt analog

$$\dim_{\mathbb{Q}}\left(\ker(- \cdot \mathrm{id}_{M_{n,n}(\mathbb{Q})}) - (-)^t)\right) = \frac{n^2 - n}{2}.$$

□