Funktheo Blatt 3 Julia Fila, Christian Merkel

A1 (a) Bew. Zeige zunächst folgende Behauptung: Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ gilt

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{(iii)}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \overset{(i)}{\leq} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \overset{(ii)}{\leq} \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$ denn

(i) klar

(ii) Sei $S := \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Dann gilt $\forall\, T > S: \exists\, n_T \in \mathbb{N}$ sd $\forall n \geq n_T: \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq T$.

Also gilt $\forall n > n_T$: $a_n \leq T a_{n-1} \leq \dots \leq T^{n-n_T} a_{n_T}$.

Dann folgt $\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{T^{n-n_T} a_{n_T}} = T \underbrace{\sqrt[n]{T^{-n_T} a_{n_T}}}_{>0} \xrightarrow{n\to\infty} T$

Es folgt $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{T^{n-n_T} a_{n_T}} = T$.

Also für $T \searrow S$ folgt die Behauptung.

(iii) Analog zu (ii) mit $S := \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ und $T \nearrow S$. #

- Sei nun $R = 0$. Dann ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$. g.zz. $\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 0$.

  Es gilt nach (i): $\infty = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. Also ex. $\forall S > 0$ eine TF sd. $\frac{|a_{n_k+1}|}{|a_{n_k}|} \geq S$ $\forall k\in\mathbb{N}$. Also $\frac{|a_{n_k}|}{|a_{n_k+1}|} \leq \frac{1}{S}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Für $S \nearrow \infty$ folgt die Beh.

- $R = \infty$. Also $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. g.zz. $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \infty$. Analog zu $R=0$ mit $S \searrow 0$.

- $R \in (0,\infty)$. Dann $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$ und $\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \frac{1}{R} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

  Zz. $\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \leq R$. Dazu sei $S > R$ bel., dann ist $\frac{1}{S} < \frac{1}{R}$ und es ex. eine TF, sd.

  $\frac{|a_{n_k+1}|}{|a_{n_k}|} \geq \frac{1}{S}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Also $\frac{|a_{n_k}|}{|a_{n_k+1}|} \leq S$ $\forall k\in\mathbb{N}$. Die Beh. folgt nun mit $S \searrow R$.

  Zz. $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \geq R$: analog zu oben mit $S \nearrow R$. □

b) (i) $a_n = \left(\frac{1}{17}\right)^n$. Dann ist $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{(1/17)^n}{(1/17)^{n+1}} = \frac{17^{-n}}{17^{-n-1}} = 17^{-n+n+1} = 17 \xrightarrow{n\to\infty} 17$

also folgt mit (a) $R = 17$.

(ii) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{1/n}{1/(n+1)} = \frac{n+1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ also folgt $R = 1$

(iii) $a_n = \frac{1}{p(n)}$ $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{p(n+1)}{p(n)} = p_n$

wobei p_n die n-te Primzahl bezeichne. Da es unendlich viele Primzahlen gibt folgt $p_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$,

also $R = \infty$.

(iv) $a_n = \frac{n^2}{2^{n+1}}$. $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{n^2}{2^{n+1}} \frac{2^{n+2}}{(n+1)^2} = 2 \frac{n^2}{(n+1)^2} = 2 \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \frac{2}{1+2/n+1/n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 2$

also $R = 2$.

A2 (a) $f: U_1(0) \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} z^n$

Beh.: $D = \mathbb{C}\setminus\{1\}$ mit $F(z) = \frac{1}{1-z}$.

Bew.: Es ist F holomorph als Produkt holomorpher Funktionen (beachte $1-z \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$).

Außerdem gilt für $z \in U_1(0)$ also $|z|<1$: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} = F(z)$.

Ang.: $\exists\, E \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $E \supsetneq D$. Dann ist $E = \mathbb{C}$ insbes. $1 \in E$. Sei G die holomorphe Fortsetzung von f auf E. Dann betrachte $z_n := 1 - \frac{1}{n}$. Dann ist $|z_n| < 1$ also $z_n \in U_1(0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt $z_n \xrightarrow{n\to\infty} 1$ aber

$$G(z_n) = f(z_n) = \sum_{k=0}^{\infty} z_n^k \underset{|z_n|<1}{=} \frac{1}{1-z_n} = \frac{1}{1-1+1/n} = n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \neq G(1) \in \mathbb{C}.$$

Also G nicht stetig in $z_0 = 1$ insbes. nicht holomorph ↯ □

(b) $g: \mathbb{C}\setminus\{-i\} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$.

Beh.: $p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2i)^n} (z-i)^n$

Bew.: Es ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2i)^n}(z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2i)^n}(z-i)^n + 1 = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-i}{2i}\right)^n + 1.$

Es gilt $\left|-\frac{z-i}{2i}\right| = \frac{|z-i|}{|2i|} = \frac{1}{2}|z-i| < 1 \Leftrightarrow |z-i| < 2 \Leftrightarrow z \in U_2(i)$. Also sei $z \in U_2(i)$. Dann folgt mit geom. Reihe $p(z) = -\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} + 1 = 1 - \frac{1}{\frac{2i+z-i}{2i}} = 1 - \frac{2i}{z+i} = \frac{z+i-2i}{z+i} = \frac{z-i}{z+i} = g(z)$

Also ist p auf $U_2(i)$ konvergent und $g|_{U_2(i)} = p$. □

A3) $w, z \in \mathbb{C}^\times$, $a, b \in \mathbb{C}$: $\quad w^a := \exp(a \cdot \operatorname{Log}(w))$

(a) Bew. $w^{a+b} = \exp(a \operatorname{Log}(w) + b \operatorname{Log}(w)) = \exp(a \operatorname{Log}(w)) \cdot \exp(b \operatorname{Log}(w)) = w^a w^b$ $\square$

(b) $\operatorname{Re}(w), \operatorname{Re}(z) > 0$. Bew. $w^a \cdot z^a = \exp(a \operatorname{Log}(w) + a \operatorname{Log}(z)) = \exp(a (\operatorname{Log}(w) + \operatorname{Log}(z)))$

g.z.z. $\operatorname{Log}(w) + \operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log}(w \cdot z)$.

Es gilt $\operatorname{Log}(w) + \operatorname{Log}(z) = \log|w| + \log|z| + i \operatorname{Arg} w + i \operatorname{Arg} z$

$= \log|wz| + i(\operatorname{Arg} w + \operatorname{Arg} z)$

Da $\operatorname{Re}(w) = |w| \cos(\operatorname{Arg} w) > 0$ und $\operatorname{Re}(z) = |z| \cos(\operatorname{Arg} w) > 0$ folgt

$\operatorname{Arg}(w), \operatorname{Arg}(z) \in (-\pi/2, \pi/2)$. Insbes. gilt $\operatorname{Arg} w + \operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi)$

$\Rightarrow \operatorname{Arg}(wz) = \operatorname{Arg}(w) + \operatorname{Arg}(z)$ und damit $\operatorname{Log}(w) + \operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log}(wz)$. $\square$

(c) $(-1 \cdot i)^{1/2} = \exp(\frac{1}{2} \operatorname{Log}(-i)) = \exp(-\frac{\pi}{4} i) \neq \exp(\frac{3}{4}\pi i) \overset{(*)}{=} \exp(1/2 \operatorname{Log}(-1)) \exp(1/2 \operatorname{Log}(i))$

da $\frac{3}{4}\pi i - (-\frac{\pi}{4} i) = \pi i$ $\qquad = (-1)^{1/2} \cdot i^{1/2}$

(*) $\operatorname{Arg}(-1) = \pi$, $\operatorname{Arg}(i) = \pi/2$, d.h. $\operatorname{Arg}(-1) + \operatorname{Arg}(i) = \frac{3}{2}\pi$

$\Rightarrow \operatorname{Log}(-1) + \operatorname{Log}(i) = i\pi + i\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi i$. $\operatorname{Log}(-i) = i \operatorname{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2} i$ $\square$

(d) $(i^3)^{1/2} = (-i)^{1/2} \overset{\text{siehe (c)}}{=} \exp(-\frac{\pi}{4} i) \overset{\text{siehe (c)}}{\neq} \exp(\frac{3}{4}\pi i) = \exp(3/2 \operatorname{Log}(i)) = i^{3/2}$ $\square$

(e) $i^i = \exp(i \cdot \operatorname{Log}(i)) = \exp(i \cdot \frac{\pi}{2} i) = \exp(-\pi/2)$. Also $\operatorname{Re}(i^i) = \exp(-\pi/2)$ und

$\operatorname{Im}(i^i) = 0$. $\square$

(f) Es ist zunächst $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ offen, da $\mathbb{R}_{\leq 0}$ abgeschlossen. Dann ist

$f : \mathbb{C}_- \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto z^s = \exp(s \cdot \operatorname{Log}(z))$.

Da $\operatorname{Log} : \mathbb{C}_- \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist $s \cdot \operatorname{Log}(z)$ holomorph mit Ableitung $\frac{d}{dz}(s \operatorname{Log}(z)) = \frac{s}{z}$.

Dann folgt mit Kettenregel, dass f holomorph mit $f'(z) = \exp(s \operatorname{Log}(z)) \frac{s}{z}$

$= s z^s z^{-1}$

$\overset{(a)}{=} s z^{s-1}$ $\square$