

Auflösung unbeschränkter Komplexe

Christian Merten

6. April 2022

1 Einleitung

Aus der kommutativen Algebra ist für einen kommutativen Ring A und A -Moduln M, N, P die Adjunktion

$$\operatorname{Hom}_A(M \otimes_A N, P) = \operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{Hom}_A(N, P))$$

bekannt. In der klassischen homologischen Algebra definiert man außerdem die Funktoren $\operatorname{Ext}_A^i(N, -)$ und $\operatorname{Tor}_A^i(-, N)$, als Ableitungen der Funktoren $\operatorname{Hom}_A(N, -)$ und $- \otimes_A N$. Nun stellt sich die Frage, ob zwischen diesen ein analoges Adjunktionsresultat gilt.

Die Antwort ist nein, denn angenommen $\operatorname{Ext}_A^i(N, -)$ wäre rechtsadjungiert, dann folgte, dass $\operatorname{Ext}_A^i(N, -)$ linksexakt sei. Die exakte Folge

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

in $\mathbb{Z}$ -Mod lieferte dann die exakte Folge

$$\operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow \operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) .$$

Da $\operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^0(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq 0$, ist jedoch

2 Derivierte Kategorien und abgeleitete Funktoren

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ abelsche Kategorien und sei $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein Funktor. Das Ziel ist es in natürlicher Weise für jedes Objekt $X \in \mathcal{A}$ einen Komplex $RF(X)$ zu definieren, dessen Kohomologiegruppen, falls F linksexakt ist, mit den klassischen Rechtsableitungen von F bei X übereinstimmen.

Allgemeiner definieren wir $RF(X^\bullet)$ für jeden Komplex $X^\bullet$ in $\mathcal{A}$. Genauer gesagt konstruieren wir einen Funktor RF von der derivierten Kategorie $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ von $\mathcal{A}$ in die derivierte Kategorie $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ von $\mathcal{B}$. Die derivierte Kategorie $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ erhalten wir durch Lokalisierung, analog zum gleichnamigen Vorgang in der kommutativen Algebra: Wir starten mit der Kategorie $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, der Komplexkategorie von $\mathcal{A}$, wobei die Morphismen Homotopieäquivalenzklassen von Komplexhomomorphismen sind. Daraus erhalten wir dann $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ indem alle Quasiisomorphismen in $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, das heißt Komplexhomomorphismen, die Isomorphismen auf den Kohomologiegruppen induzieren, in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ zu Isomorphismen erklärt werden.

Dieser Lokalisierungsprozess wird im Folgenden skizziert. Die Vorgehensweise orientiert sich an Kapitel 1 von [1].

2.1 Triangulierte Kategorien

Auch wenn $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie ist, sind $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ und $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ im Allgemeinen nicht abelsch; sie genügen jedoch einer anderen Struktur, die einer triangulierten Kategorie.

Definition 2.1 (Triangulierte Kategorie). Eine triangulierte Kategorie ist eine additive Kategorie $\mathcal{T}$ mit

- (a) einem additiven Kategorienautomorphismus $T: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$, dem Verschiebefunktor, und
- (b) einer Klasse von Sextupeln (X, Y, Z, u, v, w) , den ausgezeichneten Dreiecken von $\mathcal{T}$, wobei $X, Y, Z \in \mathcal{T}$ und $u: X \rightarrow Y, v: Y \rightarrow Z, w: Z \rightarrow T(X)$ Morphismen sind.

Ein Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken $(X, Y, Z, u, v, w) \rightarrow (X', Y', Z', u', v', w')$ ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & T(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & T(X') \end{array} .$$

Weiter unterliegen diese Daten den folgenden Axiomen:

- (TR1) Jedes zu einem ausgezeichneten Dreieck isomorphe Sextupel (X, Y, Z, u, v, w) wie oben, ist ein ausgezeichnetes Dreieck. Jeder Morphismus $u: X \rightarrow Y$ kann in ein ausgezeichnetes Dreieck (X, Y, Z, u, v, w) eingebettet werden und das Sextupel $(X, X, 0, \text{id}_X, 0, 0)$ ist ein ausgezeichnetes Dreieck für alle $X \in \mathcal{T}$.
- (TR2) (X, Y, Z, u, v, w) ist ein ausgezeichnetes Dreieck genau dann wenn $(Y, Z, T(X), v, w, -T(u))$ ein ausgezeichnetes Dreieck ist.
- (TR3) Für zwei ausgezeichnete Dreiecke (X, Y, Z, u, v, w) und (X', Y', Z', u', v', w') , und Morphismen $f: X \rightarrow X', g: Y \rightarrow Y'$, die mit u und u' kommutieren, existiert ein nicht notwendig eindeutiger Morphismus $h: Z \rightarrow Z'$, sodass (f, g, h) ein Morphismus von ausgezeichneten Dreiecken ist.

Bemerkung 2.2. Streng genommen ist die hier definierte Triangulierte Kategorie nur eine Pretriangulierte Kategorie. Für eine vollständig triangulierte Kategorie fehlt noch das Oktaheder Axiom (TR4 in [1]), das wir im Folgenden jedoch nicht benötigen.

Definition 2.3. Sei $\mathcal{T}$ eine triangulierte Kategorie mit Verschiebefunktor T . Eine Unterkategorie $\mathcal{R}$ von $\mathcal{T}$ heißt triangulierte Unterkategorie, wenn gilt

- (i) für jedes Objekt $X \in \mathcal{T}$ ist $X \in \mathcal{R}$, genau dann wenn $T(X) \in \mathcal{R}$ ist, und
- (ii) falls zwei Punkte eines ausgezeichneten Dreiecks in $\mathcal{T}$ in $\mathcal{R}$ liegen, so auch der dritte.

Definition 2.4 (Triangulierter Funktor). Ein additiver (kovarianter) Funktor $F: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ zwischen triangulierten Kategorien heißt trianguliert, wenn er ausgezeichnete Dreiecke in ausgezeichnete Dreiecke überführt und mit dem Verschiebefunktor kommutiert.

Definition 2.5 (Kohomologischer Funktor). Ein additiver (kovarianter) Funktor $H: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{A}$ von einer triangulierten Kategorie in eine abelsche Kategorie heißt (kovarianter) kohomologischer Funktor, wenn für jedes ausgezeichnete Dreieck (X, Y, Z, u, v, w) von $\mathcal{T}$ die lange Folge

$$\cdots \longrightarrow H(T^i X) \longrightarrow H(T^i Y) \longrightarrow H(T^i Z) \longrightarrow H(T^{i+1} X) \longrightarrow \cdots$$

exakt ist. Wenn H ein kohomologischer Funktor ist, dann schreiben wir auch $H^i(X)$ für $H(T^i X)$ für $i \in \mathbb{Z}$.

Lemma 2.6. Sei $\mathcal{T}$ eine triangulierte Kategorie und $X \in \mathcal{T}$. Dann sind $\text{Mor}_{\mathcal{T}}(X, -)$ und $\text{Mor}_{\mathcal{T}}(-, X)$ kohomologische Funktoren.

Beweis. siehe Proposition 1.1 in [1]. □

2.2 Homotopiekategorie

Das kanonische Beispiel für eine triangulierte Kategorie ist die Homotopiekategorie einer additiven Kategorie $\mathcal{C}$.

Definition 2.7 (Homotopiekategorie). Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie. Dann ist die Homotopiekategorie $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ von $\mathcal{C}$, die Kategorie, deren Objekte Komplexe mit Objekten aus $\mathcal{C}$ sind und deren Morphismen Homotopieäquivalenzklassen von Komplexhomomorphismen sind.

In der Homotopiekategorie haben wir einen natürlichen Kategorienautomorphismus $T: \mathcal{K}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{C})$, der durch Verschieben nach links gegeben ist, das heißt für $X^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{C})$ durch

$$T(X^\bullet)^i = X^{i+1} \text{ und } d_{T(X^\bullet)} = -d_{X^\bullet}. \quad (1)$$

Bemerkung 2.8 (Notation). Für $X^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{C})$ schreiben wir auch

$$X^\bullet[n] = T^n(X^\bullet).$$

Um die ausgezeichneten Dreiecke in $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ zu erklären, benötigen wir den Abbildungskegel eines Morphismus in $\mathcal{K}(\mathcal{C})$:

Definition 2.9 (Abbildungskegel). Seien $X^\bullet, Y^\bullet \in \mathcal{K}$ zwei Komplexe und $f: X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ ein Komplexhomomorphismus. Dann sei der Abbildungskegel $C_f^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{C})$ definiert durch

$$C_f^n = X^{n+1} \oplus Y^n$$

mit Differential

$$d_{C_f^\bullet} = \begin{pmatrix} d_{X^\bullet[1]} & 0 \\ f[1] & d_{Y^\bullet} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 2.10. (1) In der Situation von 2.9 haben wir kanonische Morphismen $i: Y^\bullet \rightarrow C_f^\bullet$ und $p: C_f^\bullet \rightarrow X^\bullet[1]$.

- (2) Oft wird auch die Notation $C_f^\bullet = X^\bullet[1] \oplus Y^\bullet$ verwendet. Man beachte jedoch, dass der Abbildungskegel *nicht* das Koprodukt von $X^\bullet[1]$ und $Y^\bullet$ ist.

Satz 2.11 (Homotopiekategorie ist trianguliert). *Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie. Dann ist die Homotopiekategorie $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ mit den folgenden Daten trianguliert:*

- (a) *Der Verschiebefunktor $T: \mathcal{K}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{C})$ wie in 1.*
 (b) *Ein Sextupel $(X^\bullet, Y^\bullet, Z^\bullet, u, v, w)$ wie in 2.1 in $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ ist ein ausgezeichnetes Dreieck, genau dann wenn es im Sinne von ausgezeichneten Dreiecken isomorph ist zu einem Sextupel der Form $(X^\bullet, Y^\bullet, C_f^\bullet, f, i, p)$, wobei $f: X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ ein Morphismus in $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ ist und $i: Y^\bullet \rightarrow C_f^\bullet$, $p: C_f^\bullet \rightarrow X^\bullet[1]$ die kanonischen Morphismen sind.*

Beweis. siehe Kapitel 1, §2 in [1]. □

Sei nun $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{A})$ die Homotopiekategorie.

Lemma 2.12. *Der Funktor $H: \mathcal{K} \rightarrow \text{Ab}$ der einen Komplex $A^\bullet$ auf seine nullte Kohomologiegruppe abbildet, ist ein kohomologischer Funktor.*

Beweis. siehe Kapitel 1, §2 in [1]. □

Daraus erhalten wir insbesondere folgendes Kriterium, ob ein Komplexhomomorphismus ein Quasiisomorphismus ist:

Lemma 2.13. *Seien $A^\bullet, B^\bullet \in \mathcal{K}$ und $f: A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ ein Komplexhomomorphismus. Dann ist f ein Quasiisomorphismus, genau dann wenn $C_f^\bullet$ exakt ist.*

Beweis. Es ist $(A^\bullet, B^\bullet, C_f^\bullet, f, \iota, \rho)$ ein ausgezeichnetes Dreieck in $\mathcal{K}$ mit $\iota: B^\bullet \rightarrow C_f^\bullet$ und $\rho: C_f^\bullet \rightarrow A^\bullet[1]$ die natürlichen Morphismen. Also erhalten wir mit 2.12 für $i \in \mathbb{Z}$ eine exakte Folge

$$H^{i-1}(C_f^\bullet) \longrightarrow H^i(A^\bullet) \xrightarrow{H^i(f)} H^i(B^\bullet) \longrightarrow H^i(C_f^\bullet) \longrightarrow H^{i+1}(A^\bullet) \xrightarrow{H^{i+1}(f)} H^{i+1}(B^\bullet) .$$

Die Exaktheit liefert nun die Äquivalenz. □

Bemerkung 2.14. Falls in der Situation von 2.13, $H^i(f)$ ein Isomorphismus ist für $i \gg 0$ (bzw. $i \ll 0$), folgt aus der exakten Folge im Beweis, dass $H^i(C_f^\bullet) = 0$ für $i \gg 0$ (bzw. $i \ll 0$).

Korollar 2.15. *Sei $\mathcal{B}$ eine weitere abelsche Kategorie und $F: \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{B})$ ein triangulierter Funktor. Dann erhält F genau dann Exaktheit von Komplexen, wenn F Quasiisomorphismen erhält.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Seien $X^\bullet, Y^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ und $f: X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ ein Quasiisomorphismus. Dann ist

$$X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \longrightarrow C_f^\bullet \longrightarrow X^\bullet[1]$$

ein ausgezeichnetes Dreieck in $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, wobei $C_f^\bullet$ nach 2.13 exakt ist. Nach Voraussetzung ist

$$F(X^\bullet) \xrightarrow{F(f)} F(Y^\bullet) \longrightarrow F(C_f^\bullet) \longrightarrow F(X^\bullet[1])$$

ebenfalls ein ausgezeichnetes Dreieck und wir erhalten für $i \in \mathbb{Z}$ die exakte Folge:

$$H^{i-1}(F(C_f^\bullet)) \longrightarrow H^i(F(X^\bullet)) \longrightarrow H^i(F(Y^\bullet)) \longrightarrow H^i(F(C_f^\bullet)) .$$

Die äußeren Terme sind 0, weil F Exaktheit erhält. Aus der Exaktheit der Folge, folgt damit der gewünschte Isomorphismus.

($\Leftarrow$) Sei $X^\bullet \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ exakt. Dann ist $X^\bullet \rightarrow 0^\bullet$ ein Quasiisomorphismus, also auch $F(X^\bullet) \rightarrow F(0^\bullet)$. Da F additiv ist, folgt $F(0^\bullet) = 0^\bullet$ und damit die Behauptung. □

2.3 Lokalisierung von Kategorien

Wie anfangs erwähnt, ist die derivierte Kategorie $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ einer abelschen Kategorie $\mathcal{A}$ eine Lokalisierung der Homotopiekategorie $\mathcal{K}(\mathcal{A})$. Diese funktioniert analog zum gleichnamigen Prozess in der kommutativen Algebra, was uns zu folgendem Begriff führt:

Definition 2.16 (Multiplikatives System). Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Eine Klasse $\mathcal{S}$ von Morphismen von $\mathcal{C}$ heißt multiplikatives System, wenn es die folgenden Axiome erfüllt:

- (FR1) Wenn $f, g \in \mathcal{S}$, sodass fg existiert, ist $fg \in \mathcal{S}$. Für alle $X \in \mathcal{C}$ ist $\text{id}_X \in \mathcal{S}$.
- (FR2) Jedes Diagramm in $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & & \downarrow s \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

mit $s \in \mathcal{S}$ kann zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{v} & Z \\ \downarrow t & & \downarrow s \\ X & \xrightarrow{u} & Y \end{array}$$

mit $t \in \mathcal{S}$ ergänzt werden. Analog gilt die selbe Aussage mit allen Pfeilen umgedreht.

- (FR3) Für $f, g: X \rightarrow Y$ Morphismen in $\mathcal{C}$, sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (i) Es existiert ein $s: Y \rightarrow Y'$ in $\mathcal{S}$, sodass $sf = sg$.
- (ii) Es existiert ein $t: X \rightarrow X'$ in $\mathcal{S}$, sodass $ft = gt$.

Definition 2.17 (Lokalisierung). Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $\mathcal{S}$ eine Klasse von Morphismen in $\mathcal{C}$. Dann ist die Lokalisierung von $\mathcal{C}$ in Bezug auf $\mathcal{S}$ eine Kategorie $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ zusammen mit einem Funktor $Q: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{S}}$, sodass

- (a) $Q(s)$ ein Isomorphismus ist für alle $s \in \mathcal{S}$ und
- (b) jeder Funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, sodass $F(s)$ ein Isomorphismus ist für alle $s \in \mathcal{S}$, eindeutig über Q faktorisiert.

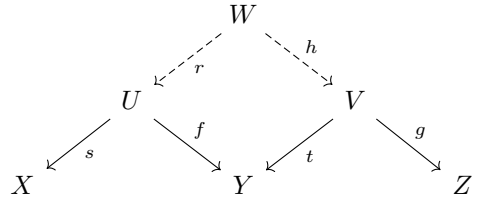
Definition 2.18. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $\mathcal{S}$ ein multiplikatives System in $\mathcal{C}$. Dann definiere die Kategorie $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ durch

- (a) $\text{ob}(\mathcal{C}) = \text{ob}(\mathcal{C}_{\mathcal{S}})$.
- (b) Für $X, Y \in \mathcal{C}$ setze $\text{Mor}_{\mathcal{C}_{\mathcal{S}}}(X, Y) = \{(f, Z, s) \mid f: Z \rightarrow Y, s: Z \rightarrow X \text{ mit } s \in \mathcal{S}\} / \sim$ wobei $(f, Z, s) \sim (f', Z', s')$ genau dann wenn ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & Z & & \\ & \swarrow s & \uparrow g & \searrow f & \\ X & & W & & Y \\ & \swarrow t & \downarrow h & \searrow f' & \\ & & Z' & & \end{array}$$

mit $t \in \mathcal{S}$ in $\mathcal{C}$ existiert.

- (c) Für $(f, U, s) \in \text{Mor}_{\mathcal{C}_S}(X, Y)$, $(g, V, t) \in \text{Mor}_{\mathcal{C}_S}(Y, Z)$ sei die Komposition definiert durch die äußeren Morphismen des kommutativen Diagramms



Die gestrichelten Morphismen existieren wegen FR2.

- (d) Für $X \in \mathcal{C}$ ist die Identität $X \rightarrow X$ in $\mathcal{C}_S$ gegeben durch das Tripel $(\text{id}_X, X, \text{id}_X)$.

Satz 2.19. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $\mathcal{S}$ ein multiplikatives System, dann ist die in 2.18 konstruierte Kategorie $\mathcal{C}_S$ wohldefiniert und eine Lokalisierung von $\mathcal{C}$ bezüglich $\mathcal{S}$. Der kanonische Funktor $Q: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S$ ist dann gegeben durch $Q(X) = X$ für $X \in \mathcal{C}$ und $Q(f) = (f, X, \text{id}_X)$ für $f: X \rightarrow Y$ in $\mathcal{C}$.

Beweis. siehe Proposition 3.1 in [1]. □

Bemerkung 2.20. (a) Da $\mathcal{S}$ eine echte Klasse sein kann, das heißt keine Menge, ist im Allgemeinen auch $\text{Mor}_{\mathcal{C}_S}(X, Y)$ für $X, Y \in \mathcal{C}_S$ keine Menge. Das heißt streng genommen ist $\mathcal{C}_S$ im Allgemeinen nur eine große Kategorie. In unseren Anwendungsfällen kann man jedoch zeigen, dass $\mathcal{C}_S$ eine (echte) Kategorie ist. Für Details siehe Bemerkung 10.3.6 in [3]. Wir nehmen im Folgenden stillschweigend an, dass $\mathcal{C}_S$ eine (echte) Kategorie ist.

- (b) Die Lokalisierung $\mathcal{C}_S$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ kann auch dual, das heißt durch Umdrehen aller Pfeile, konstruiert werden. Wenn im Folgenden der Kontext klar ist, dann schreiben wir auch einfach X für $Q(X)$ für ein Objekt $X \in \mathcal{C}$. Ebenso schreiben wir für $X, Y \in \mathcal{C}$ auch $s^{-1}f$ bzw. in der dualen Konstruktion fs^{-1} für die Äquivalenzklasse des Tripels $(f, Z, s) \in \text{Mor}_{\mathcal{C}_S}(X, Y)$. In dieser Notation ist dann $Q(f) = \text{id}^{-1}f$ bzw. $Q(f) = f\text{id}^{-1}$ für $f: X \rightarrow Y$ in $\mathcal{C}$.

Falls $\mathcal{T}$ eine triangulierte Kategorie ist und $\mathcal{S}$ ein multiplikatives System, stellt sich die Frage, ob sich die Triangulation von $\mathcal{C}$ in natürlicher Weise auf $\mathcal{C}_S$ ausdehnt. Dazu fordern wir zusätzlich an $\mathcal{S}$:

Definition 2.21 (Mit Triangulation kompatibles multiplikatives System). Sei $\mathcal{T}$ eine triangulierte Kategorie mit Verschiebefunktor T und $\mathcal{S}$ ein multiplikatives System von Morphismen. Wir nennen $\mathcal{S}$ kompatibel mit der Triangulation, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

$$(\text{FR4}) \quad s \in \mathcal{S} \iff T(s) \in \mathcal{S}.$$

- (FR5) TR3 unter der zusätzlichen Annahme, dass $f, g \in \mathcal{S}$ und der zusätzlichen Forderung, dass $h \in \mathcal{S}$ ist.

Satz 2.22. Sei $\mathcal{T}$ eine triangulierte Kategorie und $\mathcal{S}$ ein mit der Triangulation kompatibles multiplikatives System. Dann hat $\mathcal{T}_S$ eine eindeutige triangulierte Struktur, sodass Q ein triangulierter Funktor ist und die universelle Eigenschaft b) aus 2.17 für triangulierte Funktoren in triangulierte Kategorien erfüllt.

Beweis. siehe Proposition 3.2 in [1]. □

2.4 Derivierte Kategorie

Sei im Folgenden $\mathcal{A}$ eine feste abelsche Kategorie und $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{A})$ die Homotopiekategorie. Wir bezeichnen im Folgenden die Klasse der Quasiisomorphismen in $\mathcal{K}$ als $\mathcal{Q}is$.

Lemma 2.23 ($\mathcal{Q}is$ ist multiplikativ). *$\mathcal{Q}is$ ist ein mit der Triangulation von $\mathcal{K}$ kompatibles multiplikatives System.*

Beweis. siehe Proposition 4.1 in [1]. □

Nach 2.19, 2.22 und 2.23 angewendet auf $\mathcal{K}$ und $\mathcal{Q}is$, existiert die triangulierte Kategorie $\mathcal{K}_{\mathcal{Q}is}$.

Definition 2.24 (Derivierte Kategorie). Wir bezeichnen die triangulierte Lokalisierung $\mathcal{K}_{\mathcal{Q}is}$ als die derivierte Kategorie $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{A})$ von $\mathcal{A}$.

Bemerkung 2.25. Im Folgenden bezeichne $Q = Q_{\mathcal{A}}: \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$ den kanonischen Lokalisierungsfunktor.

Um zu verstehen, wann zwei Morphismen in $\mathcal{K}$ den selben Morphismus in $\mathcal{D}$ induzieren, hilft das folgende Lemma:

Lemma 2.26. *Seien $X^\bullet, Y^\bullet \in \mathcal{K}$ und $f: X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

- (i) $id^{-1}f = 0$ in $\mathcal{D}$.
- (ii) *Es existiert ein Quasiisomorphismus $t: X'^\bullet \rightarrow X^\bullet$, sodass $ft = 0$ in $\mathcal{K}$.*
- (iii) *Es existiert ein Quasiisomorphismus $s: Y^\bullet \rightarrow Y'^\bullet$, sodass $sf = 0$ in $\mathcal{K}$.*

Beweis. Wegen FR3 und 2.23 genügt es die Äquivalenz von (i) und (ii) zu zeigen. Es ist $id^{-1}f = 0$, genau dann wenn ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X^\bullet & & \\
 & \swarrow & \uparrow & \searrow f & \\
 X^\bullet & \xleftarrow{id} & X'^\bullet & & Y^\bullet \\
 & \nwarrow t & \downarrow & \nearrow 0 & \\
 & & X^\bullet & & \\
 & \swarrow id & & \searrow & \\
 & & & &
 \end{array}$$

mit t Quasiisomorphismus existiert. Das zeigt die Behauptung. □

Wir möchten nun Ableitungen von Funktoren im Kontext von derivierten Kategorien betrachten. Seien dafür $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien und $F: \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{B})$ ein triangulierter (kovarianter) Funktor. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn F induziert ist von einem additiven Funktor $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$.

Falls F exakt ist werden Quasiisomorphismen auf Quasiisomorphismen geschickt und F induziert daher einen Funktor von $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ nach $\mathcal{D}(\mathcal{B})$. Im Allgemeinen ist das nicht der Fall und wir konstruieren dann, unter bestimmten Voraussetzungen an F und die beteiligten Kategorien, einen Funktor $RF: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$:

Definition 2.27 (Abgeleiteter Funktor). Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ abelsche Kategorien. Der rechts abgeleitete Funktor von F ist ein triangulierter Funktor

$$RF: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$$

zusammen mit einer natürlichen Transformation

$$\xi: Q_{\mathcal{B}} \circ F \rightarrow RF \circ Q_{\mathcal{A}}$$

von Funktoren von $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ nach $\mathcal{D}(\mathcal{B})$ mit der folgenden universellen Eigenschaft: Für jeden triangulierten Funktor

$$G: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$$

und jede natürliche Transformation

$$\zeta: Q_{\mathcal{B}} \circ F \rightarrow G \circ Q_{\mathcal{A}}$$

existiert eine eindeutige natürliche Transformation

$$\eta: RF \rightarrow G$$

von Funktoren von $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ nach $\mathcal{D}(\mathcal{B})$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} Q_{\mathcal{B}} \circ F & \xrightarrow{\xi} & RF \circ Q_{\mathcal{A}} \\ & \searrow \zeta & \downarrow \eta \\ & & G \circ Q_{\mathcal{A}} \end{array} .$$

Bemerkung 2.28. (a) Falls RF existiert, ist dieser bis auf eindeutige natürliche Transformationen eindeutig.

(b) Wir schreiben $R^i F$ für $H^i(RF)$ und wenn F induziert ist von einem links-exakten Funktor $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ und $\mathcal{A}$ genügend Injektive hat, sind das genau die klassischen rechts-abgeleiteten Funktoren von F .

(c) Es gibt den analogen Begriff der Linksableitung LF (kovarianter) Funktoren, bei dem sich die Pfeile der natürlichen Transformationen umdrehen.

Satz 2.29. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ abelsche Kategorien und $F: \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{B})$ ein triangulierter Funktor. Angenommen es existiert eine triangulierte Unterkategorie $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}(\mathcal{A})$, sodass

(i) Jeder Komplex in $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ besitzt einen Quasiisomorphismus in einen Komplex aus $\mathcal{L}$.

(ii) $F|_{\mathcal{L}}$ ist exakt.

Dann existiert der Funktor $RF: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{B})$ und für die natürliche Transformation $\xi: Q_{\mathcal{B}} \circ F \rightarrow RF \circ Q_{\mathcal{A}}$ gilt, dass für alle $I^{\bullet} \in \mathcal{L}$ die Abbildung

$$\xi(I^{\bullet}): Q_{\mathcal{B}}(F(I^{\bullet})) \rightarrow RF(Q_{\mathcal{A}}(I^{\bullet}))$$

ein Isomorphismus in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ ist.

Beweis. siehe Theorem 5.1 in [1]. □

Die Voraussetzungen von 2.29 sind im Allgemeinen schwer zu erfüllen. Deshalb betrachtet man häufig gewisse Unterkategorien von $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, beispielsweise die Kategorie $\mathcal{K}^+(\mathcal{A})$ der nach unten beschränkten Komplexe. Dies genügt, um den Fall (b) aus 2.28 zu studieren.

Für unbeschränkte Komplexe liegt die Schwierigkeit darin eine geeignete Unterkategorie $\mathcal{L}$ zu finden, die die Bedingungen aus 2.29 erfüllt. Ziel dieser Arbeit ist es herauszuarbeiten, dass im Falle von $\mathcal{A} = A\text{-Mod}$ für einen kommutativen Ring A , die Bedingungen für die im Folgenden definierten Funktoren $\text{Hom}^{\bullet}(M^{\bullet}, -)$, $\text{Hom}^{\bullet}(-, M^{\bullet})$ und $M^{\bullet} \otimes_A -$ erfüllt sind. Das wird uns erlauben das klassische Adjunktionsresultat

$$- \otimes_A M \dashv \text{Hom}_{A\text{-Mod}}(M, -)$$

für einen A -Modul M auf die abgeleiteten Funktoren zu übertragen.

Definition 2.30. Seien $X^\bullet, Y^\bullet \in \mathcal{K}$ zwei Komplexe in einer beliebigen abelschen Kategorie $\mathcal{A}$. Dann sei $\text{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet) \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ definiert durch

$$\text{Hom}^n(X^\bullet, Y^\bullet) = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}(X^i, Y^{i+n})$$

mit Differentialen

$$d^n(f) = d_{Y^\bullet} \cdot f - (-1)^n f d_{X^\bullet}$$

für $f \in \text{Hom}^n(X^\bullet, Y^\bullet)$.

Definition 2.31. Sei A ein kommutativer Ring und seien $M^\bullet, N^\bullet \in \mathcal{K}(A\text{-Mod})$. Dann sei $M^\bullet \otimes_A N^\bullet \in \mathcal{K}(A\text{-Mod})$ definiert durch

$$(M^\bullet \otimes_A N^\bullet)^n = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M^i \otimes_A N^{n-i}$$

mit Differentialen

$$d^n(m \otimes n) = d_{M^\bullet}(m) \otimes n + (-1)^i m \otimes d_{N^\bullet}(n)$$

für $m \in M^i, n \in N^{n-i}$.

Bemerkung 2.32. (a) Die Konstruktionen in 2.30 und 2.31 sind funktoriell in beiden Variablen und induzieren daher entsprechende Funktoren.

(b) Wie für das klassische Tensorprodukt von A -Moduln, existieren für $M^\bullet, N^\bullet, P^\bullet \in \mathcal{K}(A\text{-Mod})$ natürliche Isomorphismen

$$M^\bullet \otimes_A N^\bullet = N^\bullet \otimes_A M^\bullet \text{ und } (M^\bullet \otimes_A N^\bullet) \otimes_A P^\bullet = M^\bullet \otimes_A (N^\bullet \otimes_A P^\bullet).$$

Die Kohomologiegruppen von $\text{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)$ für Komplexe $X^\bullet, Y^\bullet \in \mathcal{K}$ lassen sich explizit bestimmen:

Lemma 2.33. Seien $X^\bullet, Y^\bullet \in \mathcal{K}$ zwei Komplexe. Dann gilt für $n \in \mathbb{Z}$:

$$H^n \text{Hom}^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet) = \text{Mor}_{\mathcal{K}}(X^\bullet, Y^\bullet[n]).$$

Beweis. Sei $(f^i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \prod_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}(X^i, Y^{i+n})$. Dann ist:

$$(f^i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \ker d^n \iff (-1)^n d_{Y^\bullet}^{i+n} f^i = f^{i+1} d_{X^\bullet}^i \text{ für } i \in \mathbb{Z}.$$

Wegen $d_{Y^\bullet[n]} = (-1)^n d_{Y^\bullet}$, induziert $(f^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ also genau dann einen Komplexhomomorphismus $X^\bullet \rightarrow Y^\bullet[n]$, wenn $(f^i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \ker d^n$.

Weiter ist $(f^i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \text{im } d^{n-1}$, genau dann wenn eine Familie $(k^i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \prod_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}(X^i, Y^{i+n-1})$ existiert, sodass

$$(-1)^n f^i = (-1)^n d_{Y^\bullet}^{i+n-1} k^i + k^{i+1} d_{X^\bullet}^i.$$

Erneut wegen $d_{Y^\bullet[n]} = (-1)^n d_{Y^\bullet}$, ist also für $(f^i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \ker d^n$ der induzierte Komplexhomomorphismus $f: X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ genau dann nullhomotop, wenn $(f^i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \text{im } d^{n-1}$. $\square$

Lemma 2.34 ($\text{Hom}^\bullet(-, -)$ und (Co)limites). Sei $X^\bullet \in \mathcal{K}$ und seien $(S_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $(T_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ direkte bzw. inverse Systeme in $\mathcal{K}$. Dann sind die natürlichen Homomorphismen

$$\text{Hom}^\bullet(\varinjlim S_n^\bullet, X^\bullet) \longrightarrow \varprojlim \text{Hom}^\bullet(S_n^\bullet, X^\bullet)$$

und

$$\text{Hom}^\bullet(X^\bullet, \varprojlim T_n^\bullet) \longrightarrow \varinjlim \text{Hom}^\bullet(X^\bullet, T_n^\bullet)$$

Isomorphismen.

Beweis. Das gilt gradweise nach Definition von $\varprojlim$ und man verifiziert, dass die gradweisen Homomorphismen Komplexhomomorphismen bilden. $\square$

Lemma 2.35 (Tensorprodukt ist trianguliert). *Sei $M^\bullet \in \mathcal{K}(A\text{-Mod})$. Dann ist $-\otimes_A M^\bullet$ (und $M^\bullet \otimes_A -$) ein triangulierter Funktor von $\mathcal{K}(A\text{-Mod})$ nach $\mathcal{K}(A\text{-Mod})$.*

Beweis. Nach der Definition von ausgezeichneten Dreiecken in $\mathcal{K}$ genügt es nachzurechnen, dass für $f: X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ in $\mathcal{K}$ und $S^\bullet \in \mathcal{K}$ gilt:

$$C_f^\bullet \otimes_A S^\bullet = C_{f \otimes \text{id}_{S^\bullet}}^\bullet.$$

Das rechnet man gradweise nach und zeigt, dass die Differentiale übereinstimmen. $\square$

Satz 2.36 (Adjunktion der Hom- und Tensorproduktkomplexe). *Seien $M^\bullet, N^\bullet, P^\bullet \in \mathcal{K}(A\text{-Mod})$. Dann existiert ein natürlicher Isomorphismus, der funktoriell in allen Variablen ist:*

$$\text{Hom}^\bullet(M^\bullet \otimes_A N^\bullet, P^\bullet) = \text{Hom}^\bullet(M^\bullet, \text{Hom}^\bullet(N^\bullet, P^\bullet)).$$

Beweis. Das gilt gradweise, weil für beliebige A -Moduln M, N, P ein natürlicher Isomorphismus

$$\text{Hom}_A(M \otimes_A N, P) \rightarrow \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(N, P))$$

existiert. Man verifiziert, dass die gradweisen Isomorphismen Komplexhomomorphismen bilden. $\square$

3 K-injektive und K-projektive Auflösungen

Sei $Y^\bullet \in \mathcal{K}$. Um die Bedingungen von 2.29 für $\text{Hom}^\bullet(Y^\bullet, -)$ (bzw. $\text{Hom}^\bullet(-, Y^\bullet)$) zu erfüllen, benötigen wir eine Unterkategorie $\mathcal{L}$ von Komplexen in $\mathcal{K}$, sodass

- (i) für jeden Komplex $X^\bullet \in \mathcal{K}$ ein Quasiisomorphismus $X^\bullet \rightarrow I^\bullet$ mit $I^\bullet \in \mathcal{L}$ (bzw. $P^\bullet \rightarrow X^\bullet$ mit $P^\bullet \in \mathcal{L}$) existiert, und
- (ii) $\text{Hom}^\bullet(Y^\bullet, -)$ (bzw. $\text{Hom}^\bullet(-, Y^\bullet)$) Exaktheit von Komplexen aus $\mathcal{L}$ erhält.

Dazu definieren wir:

Definition 3.1 (K-injektiv). Ein Komplex $I^\bullet \in \mathcal{K}$ heißt K-injektiv, wenn der Funktor $\text{Hom}^\bullet(-, I^\bullet)$ Exaktheit von Komplexen erhält. Eine K-injektive Auflösung eines Komplexes $X^\bullet \in \mathcal{K}$ ist ein Quasiisomorphismus $X^\bullet \rightarrow I^\bullet$ mit $I^\bullet \in \mathcal{K}$ K-injektiv.

Definition 3.2 (K-projektiv). Ein Komplex $P^\bullet \in \mathcal{K}$ heißt K-projektiv, wenn der Funktor $\text{Hom}^\bullet(P^\bullet, -)$ Exaktheit von Komplexen erhält. Eine K-projektive Auflösung eines Komplexes $X^\bullet \in \mathcal{K}$ ist ein Quasiisomorphismus $P^\bullet \rightarrow X^\bullet$ mit $P^\bullet \in \mathcal{K}$ K-projektiv.

Das Ziel dieses Abschnitts ist das folgende Resultat:

Satz 3.3. Sei R ein Ring und $\mathcal{A}$ die Kategorie der R (links-)Moduln. Dann hat jeder Komplex in $\mathcal{A}$ eine K-injektive und eine K-projektive Auflösung.

Die Vorgehensweise orientiert sich dabei an [2].

3.1 Elementare Eigenschaften von K-injektiven und K-projektiven Komplexen

Zunächst werden einige grundlegenden Eigenschaften von K-injektiven und K-projektiven Komplexen entwickelt.

Lemma 3.4. Sei $X^\bullet \in \mathcal{K}$. Es gilt

$$\begin{aligned} X^\bullet \text{ K-injektiv} &\iff \text{Mor}_{\mathcal{K}}(S^\bullet, X^\bullet) = 0 \quad \forall S^\bullet \in \mathcal{K} \text{ exakt} \\ X^\bullet \text{ K-projektiv} &\iff \text{Mor}_{\mathcal{K}}(X^\bullet, S^\bullet) = 0 \quad \forall S^\bullet \in \mathcal{K} \text{ exakt.} \end{aligned}$$

Beweis. Mit 2.33 ist $X^\bullet$ genau dann K-injektiv, wenn für jeden exakten Komplex $S^\bullet \in \mathcal{K}$ gilt, dass $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(S^\bullet[i], X^\bullet) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}$. Da Verschieben Exaktheit erhält folgt die Behauptung. Die duale Aussage folgt durch Umdrehen der Pfeile. $\square$

Lemma 3.5. Ein exakter K-projektiver oder K-injektiver Komplex $X^\bullet \in \mathcal{K}$ ist zusammenziehbar, das heißt ist nullhomotop, also in $\mathcal{K}$ isomorph zum Nullkomplex.

Beweis. Betrachte $\text{id}_{X^\bullet} \in \text{Mor}_{\mathcal{K}}(X^\bullet, X^\bullet) \stackrel{2.33}{=} H^0 \text{Hom}^\bullet(X^\bullet, X^\bullet) = 0$. Also ist $\text{id}_{X^\bullet} = 0$ und damit $X^\bullet \cong 0$ in $\mathcal{K}$. $\square$

Bemerkung 3.6. Aus 3.5 folgt, dass für einen exakten und K-injektiven Komplex $I^\bullet \in \mathcal{K}$ und einen beliebigen Komplex $X^\bullet \in \mathcal{K}$, der Komplex $\text{Hom}^\bullet(X^\bullet, I^\bullet)$ exakt ist, denn

$$H^i(\text{Hom}^\bullet(X^\bullet, I^\bullet)) = \text{Mor}_{\mathcal{K}}(\text{Hom}^\bullet(X^\bullet, I^\bullet[i])) \stackrel{3.5}{=} \text{Mor}_{\mathcal{K}}(\text{Hom}^\bullet(X^\bullet, 0)) = 0.$$

Analog gilt die duale Version für exakte K-projektive Komplexe.

Für ein Objekt $X \in \mathcal{A}$ stellt sich die Frage, ob Injektivität (bzw. Projektivität) von X in $\mathcal{A}$ mit K -injektivität (bzw. K -projektivität) des Komplexes $X^\bullet$, wobei $X^i = 0$ für alle $i \neq 0$ und $X^0 = X$, zusammenhängt. Die folgende Aussage stellt diesen Zusammenhang her:

Satz 3.7. *Sei $X^\bullet \in \mathcal{K}$ mit $X^i = 0 \ \forall i \neq 0$. Dann ist $X^\bullet$ K -projektiv (bzw. K -injektiv) genau dann wenn X^0 projektiv (bzw. injektiv) in $\mathcal{A}$ ist.*

Beweis. Wir zeigen nur den K -projektiven Fall. Der K -injektive folgt dann durch Umdrehen aller Pfeile.

($\Leftarrow$) Sei $X^\bullet$ K -projektiv und $S^\bullet = [0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0]$ eine kurze exakte Folge in $\mathcal{A}$. Sei $f: X^0 \rightarrow P$. Das induziert einen Komplexhomomorphismus $X^\bullet \rightarrow S^\bullet$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^0 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow k & \downarrow f & \searrow & \downarrow \\ M & \longrightarrow & N & \xrightarrow{v} & P & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Nach Voraussetzung ist dieser nullhomotop, das heißt es existiert ein $k: X^0 \rightarrow N$, sodass $f = vk$. Also ist $v_*: \text{Hom}(X^0, N) \rightarrow \text{Hom}(X^0, P)$ surjektiv und damit X^0 projektiv.

($\Rightarrow$) Sei nun X^0 projektiv, $S^\bullet \in \mathcal{K}$ exakt und $f: X^\bullet \rightarrow S^\bullet$ Komplexhomomorphismus. Dann betrachte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & & \longrightarrow & X^0 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & & \searrow k^0 & \downarrow f^0 & & \downarrow \\ S^{-1} & \xrightarrow{d^{-1}} & \text{im } d^{-1} & \longrightarrow & S^0 & \xrightarrow{d^0} & S^1 \end{array} .$$

Da $d^0 f^0 = 0$, faktorisiert f^0 über $\ker d^0 = \text{im } d^{-1}$. Weil X^0 projektiv ist, existiert $k^0: X^0 \rightarrow S^{-1}$, sodass $f^0 = d^{-1} k^0$. $\square$

Satz 3.8. *Die volle Unterkategorie der K -projektiven (bzw. K -injektiven) Komplexe in $\mathcal{K}$ ist eine triangulierte Unterkategorie.*

Beweis. Wir zeigen Bedingungen (i) und (ii) aus 2.3 in der K -projektiven Version, die duale Aussage folgt durch Umdrehen der Pfeile.

(i) Das folgt aus 3.4 und daraus, dass für $X^\bullet, S^\bullet \in \mathcal{K}$ gilt: $S^\bullet$ exakt $\iff S^\bullet[-1]$ exakt und

$$\text{Mor}_{\mathcal{K}}(X^\bullet, S^\bullet[-1]) = \text{Mor}_{\mathcal{K}}(X^\bullet[1], S^\bullet).$$

(ii) Sei $(X^\bullet, Y^\bullet, Z^\bullet, u, v, w)$ ein ausgezeichnetes Dreieck in $\mathcal{K}$ mit $X^\bullet, Y^\bullet$ K -projektiv und $S^\bullet \in \mathcal{K}$ ein exakter Komplex. Nach Anwenden von $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(-, S^\bullet)$ ist dann mit 2.6 die Folge

$$\underbrace{\text{Mor}_{\mathcal{K}}(X^\bullet[1], S^\bullet)}_{=0} \longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{K}}(Z^\bullet, S^\bullet) \longrightarrow \underbrace{\text{Mor}_{\mathcal{K}}(Y^\bullet, S^\bullet)}_{=0} .$$

exakt und die äußeren Terme 0 nach Voraussetzung und (i). Also folgt $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(Z^\bullet, S^\bullet) = 0$, und damit $Z^\bullet$ K -projektiv. Der allgemeine Fall folgt nun mit TR2. $\square$

Satz 3.9. *Sei $P^\bullet \in \mathcal{K}$. Dann sind äquivalent*

(i) $P^\bullet$ K -projektiv

(ii) Für $X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ Quasiisomorphismus in $\mathcal{K}$ ist der natürliche Homomorphismus

$$\text{Mor}_{\mathcal{K}}(P^\bullet, X^\bullet) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{K}}(P^\bullet, Y^\bullet)$$

ein Isomorphismus.

(iii) Für $S^\bullet \in \mathcal{K}$ ist der natürliche Homomorphismus

$$\text{Mor}_{\mathcal{K}}(P^\bullet, S^\bullet) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(P^\bullet, S^\bullet)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Sei $f: X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ ein Quasiisomorphismus. Dann ist

$$X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \longrightarrow C_f^\bullet \longrightarrow X^\bullet[1]$$

ein ausgezeichnetes Dreieck und $C_f^\bullet$ ist nach 2.13 exakt. Anwenden von $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(P^\bullet, -)$ liefert mit 2.6 eine exakte Folge:

$$\underbrace{\text{Mor}_{\mathcal{K}}(P^\bullet, C_f^\bullet[-1])}_{=0} \longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{K}}(P^\bullet, X^\bullet) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{K}}(P^\bullet, Y^\bullet) \longrightarrow \underbrace{\text{Mor}_{\mathcal{K}}(P^\bullet, C_f^\bullet)}_{=0}.$$

Die äußeren Terme sind 0, da $P^\bullet$ K -projektiv ist, also folgt der behauptete Isomorphismus.

(ii) $\implies$ (iii): Injektivität: Sei $f: P^\bullet \rightarrow S^\bullet$, sodass $\text{id}^{-1}f = 0$. Nach 2.26 existiert ein Quasiisomorphismus $t: S^\bullet \rightarrow T^\bullet$, sodass $tf = 0$. Nach (ii) ist $t_*: \text{Mor}_{\mathcal{K}}(P^\bullet, S^\bullet) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{K}}(P^\bullet, T^\bullet)$ injektiv, also folgt $f = 0$. Surjektivität: Sei $a \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}(P^\bullet, S^\bullet)$. Dann ist a ein Diagramm in $\mathcal{K}$

$$\begin{array}{ccc} & Y^\bullet & \\ f \nearrow & & \nwarrow s \\ P^\bullet & & S^\bullet \end{array}$$

mit s Quasiisomorphismus. Nach (ii) ist $s_*: \text{Mor}_{\mathcal{K}}(P^\bullet, S^\bullet) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{K}}(P^\bullet, Y^\bullet)$ surjektiv, also existiert ein $g: P^\bullet \rightarrow Y^\bullet$, sodass $sg = f$. Also kommutiert

$$\begin{array}{ccccc} & & S^\bullet & & \\ & g \nearrow & \downarrow s & \nwarrow \text{id} & \\ P^\bullet & & Y^\bullet & \xleftarrow{s} & S^\bullet \\ & f \searrow & \uparrow \text{id} & \swarrow s & \\ & & Y^\bullet & & \end{array}.$$

Damit folgt $a = g\text{id}^{-1}$.

(iii) $\implies$ (i): Sei $S^\bullet$ exakt. Dann ist $S^\bullet \rightarrow 0$ ein Quasiisomorphismus, also $S^\bullet \cong 0$ in $\mathcal{D}$, also

$$\text{Mor}_{\mathcal{K}}(P^\bullet, S^\bullet) \stackrel{(ii)}{=} \text{Mor}_{\mathcal{D}}(P^\bullet, S^\bullet) = \text{Mor}_{\mathcal{D}}(P^\bullet, 0^\bullet) = 0.$$

□

Satz 3.10. Sei $P^\bullet \in \mathcal{K}$. Dann sind äquivalent

(i) $P^\bullet$ K -projektiv.

(ii) Für alle Diagramme in $\mathcal{K}$

$$\begin{array}{ccc} & X^\bullet & \\ & \downarrow s & \\ P^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet \end{array}$$

mit s Quasiisomorphismus, existiert genau ein $g: P^\bullet \rightarrow X^\bullet$, sodass $sg = f$ in $\mathcal{K}$.

(iii) Für alle Quasiisomorphismen $s: S^\bullet \rightarrow P^\bullet$ in $\mathcal{K}$ existiert ein $g: P^\bullet \rightarrow S^\bullet$, sodass $sg = \text{id}_{P^\bullet}$ in $\mathcal{K}$.

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Betrachte das gegebene Diagramm in $\mathcal{D}$:

$$\begin{array}{ccc} & & X^\bullet \\ & \nearrow g & \downarrow \text{id}^{-1}s \\ P^\bullet & \xrightarrow{\text{id}^{-1}f} & Y^\bullet \end{array}$$

Da s ein Quasiisomorphismus ist, induziert s einen Isomorphismus in $\mathcal{D}$. Also existiert genau ein $g: P^\bullet \rightarrow X^\bullet$ in $\mathcal{D}$, sodass das Diagramm kommutiert. 3.9 (iii) liefert das gewünschte Diagramm in $\mathcal{K}$.

(ii) $\implies$ (iii): Betrachte

$$\begin{array}{ccc} & & S^\bullet \\ & & \downarrow s \\ P^\bullet & \xrightarrow{\text{id}} & P^\bullet \end{array}$$

Da s ein Quasiisomorphismus ist, existiert mit (ii) ein $g: P^\bullet \rightarrow S^\bullet$, sodass $sg = \text{id}_{P^\bullet}$.

(iii) $\implies$ (i): Erneut mit 3.9 genügt es zu zeigen, dass für $S^\bullet \in \mathcal{K}$ $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(P^\bullet, S^\bullet) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(P^\bullet, S^\bullet)$ bijektiv ist. Injektivität: Sei $f: P^\bullet \rightarrow S^\bullet$ mit $\text{id}^{-1}f = 0$ in $\mathcal{D}$. Dann existiert nach 2.26 ein Quasiisomorphismus $t: T^\bullet \rightarrow P^\bullet$ mit $ft = 0$. Also existiert mit (iii) ein $g: P^\bullet \rightarrow T^\bullet$, sodass $tg = \text{id}_{P^\bullet}$, also

$$f = f \text{id}_{P^\bullet} = \underbrace{ft}_{=0} g = 0.$$

Surjektivität: Sei $a: P^\bullet \rightarrow S^\bullet$ in $\mathcal{D}$. Dann ist a gegeben durch ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & Q^\bullet & \\ & \swarrow s \quad \searrow f & \\ P^\bullet & & S^\bullet \end{array}$$

in $\mathcal{K}$ mit s Quasiisomorphismus. Nach (iii) existiert ein $t: P^\bullet \rightarrow Q^\bullet$ mit $st = \text{id}_{P^\bullet}$. Dann ist

$$\begin{array}{ccccc} & & Q^\bullet & & \\ & \swarrow s & \uparrow t & \searrow f & \\ P^\bullet & \xleftarrow{\text{id}} & P^\bullet & \xrightarrow{ft} & S^\bullet \\ & \swarrow \text{id} & \downarrow \text{id} & \nearrow & \\ & & P^\bullet & & \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm in $\mathcal{K}$, also folgt $s^{-1}f = \text{id}^{-1}(ft)$ in $\mathcal{D}$. □

Durch Umdrehen aller Pfeile erhalten wir analog:

Satz 3.11. Für jeden Komplex $I^\bullet \in \mathcal{K}$ sind äquivalent:

(i) $I^\bullet$ K -injektiv

(ii) Für $S^\bullet \in \mathcal{K}$ ist der natürliche Homomorphismus

$$\text{Mor}_{\mathcal{K}}(S^\bullet, I^\bullet) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(S^\bullet, I^\bullet)$$

ein Isomorphismus.

(iii) Für jedes Diagramm in $\mathcal{K}$

$$\begin{array}{ccc} Y^\bullet & \xrightarrow{f} & I^\bullet \\ \downarrow s & & \\ X^\bullet & & \end{array}$$

mit s Quasiisomorphismus, existiert genau ein $g: X^\bullet \rightarrow I^\bullet$, sodass das Diagramm kommutiert.

(iv) Für jeden Quasiisomorphismus $s: I^\bullet \rightarrow S^\bullet$ in $\mathcal{K}$ existiert ein $g: S^\bullet \rightarrow I^\bullet$, sodass $gs = id_{I^\bullet}$ in $\mathcal{K}$.

3.2 Spezielle inverse und direkte Systeme

Nun stellt sich die Aufgabe für jeden Komplex $A^\bullet \in \mathcal{K}$ eine K-injektive und eine K-projektive Auflösung zu konstruieren. Dies machen wir mit sogenannten speziellen inversen bzw. direkten Systemen.

Definition 3.12 (Spezielles inverses System). Sei $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}$ eine Klasse von Komplexen.

(a) Ein inverses System $(I_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{K}$ heißt $\mathcal{J}$ -spezielles inverses System, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Falls $n = 1$, dann ist $I_n^\bullet = 0$.
- (ii) Falls $n > 1$, dann sei $C_n^\bullet$ der Kern der natürlichen Abbildung $I_n^\bullet \rightarrow I_{n-1}^\bullet$. Dann ist $C_n^\bullet \in \mathcal{J}$ und die kurze exakte Folge

$$0 \rightarrow C_n^\bullet \rightarrow I_n^\bullet \rightarrow I_{n-1}^\bullet \rightarrow 0$$

zerfällt stufenweise.

(b) Die Klasse $\mathcal{J}$ heißt abgeschlossen unter speziellen inversen Limites, falls jedes $\mathcal{J}$ -spezielle inverse System in $\mathcal{K}$ einen Limes in $\mathcal{J}$ besitzt und jeder Komplex in $\mathcal{K}$, der isomorph ist zu einem Komplex in $\mathcal{J}$, bereits in $\mathcal{J}$ ist.

Lemma 3.13. Sei $\mathcal{J}_0$ eine Klasse von Objekten von $\mathcal{A}$. Sei weiter $\mathcal{J}$ eine unter speziellen inversen Limites abgeschlossene Klasse von Objekten in $\mathcal{K}$, sodass jeder Komplex $A^\bullet \in \mathcal{K}$ mit nur einem nicht-null Term und mit $A^i \in \mathcal{J}_0$ für $i \in \mathbb{Z}$, in $\mathcal{J}$ enthalten ist. Dann ist jeder nach unten beschränkte Komplex $A^\bullet \in \mathcal{K}$ mit $A^i \in \mathcal{J}_0$ für $i \in \mathbb{Z}$ in $\mathcal{J}$ enthalten.

Beweis. Sei $A^\bullet \in \mathcal{K}$ nach unten beschränkt mit $A^i \in \mathcal{J}_0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Ohne Einschränkung sei $A^i = 0$ für alle $i < 0$. Dann sind die Spalten des nachstehenden Diagramms ein $\mathcal{J}$ -spezielles inverses System $(S_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Übergangsabbildungen p_n ,

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & A^0 & \longrightarrow & A^0 & \longrightarrow & A^0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & A^1 & \longrightarrow & A^1 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & A^2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

denn für $n > 1$ ist $\ker p_n^\bullet = [\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \underbrace{A^{n-2}}_{\in \mathcal{J}_0} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots]$. Nach Voraussetzung ist also $\ker p_n$ in $\mathcal{J}$ und die kurze exakte Folge $0 \rightarrow \ker p_n^\bullet \rightarrow S_n^\bullet \rightarrow S_{n-1}^\bullet \rightarrow 0$ zerfällt gradweise. Also folgt $A^\bullet = \varprojlim S_n^\bullet \in \mathcal{J}$. $\square$

Im Folgenden zeigen wir, dass die Klasse der K-injektiven Komplexe abgeschlossen unter speziellen inversen Limites ist. Dazu zeigen wir zunächst, dass dies für die Klasse der exakten Komplexe gilt. Da der inverse Limes im Allgemeinen nicht exakt ist, benötigen wir dafür ein technisches Hilfswerkzeug für inverse Systeme in $\mathcal{A}b$.

Definition 3.14. Ein inverses System $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}b$ genüge der Bedingung (R), wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) $M_1 = 0$.
- (ii) Für $n > 1$ ist die Abbildung $M_n \rightarrow M_{n-1}$ surjektiv.

Beispiel 3.15. Spezielle inverse Systeme erfüllen (R).

Lemma 3.16. Seien $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ inverse Systeme in $\mathcal{A}b$, die (R) erfüllen und seien

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{(f_n)_{n \in \mathbb{N}}} (B_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{(g_n)_{n \in \mathbb{N}}} (C_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{(h_n)_{n \in \mathbb{N}}} (D_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad (2)$$

Morphismen von inversen Systemen mit $g_n \circ f_n = 0 = h_n \circ g_n$ für $n \in \mathbb{N}$ und sei

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

der Limes von (2). Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ seien A'_n , B'_n , C'_n und D'_n die jeweiligen Kerne der Übergangsabbildungen $A_n \rightarrow A_{n-1}$, $B_n \rightarrow B_{n-1}$, $C_n \rightarrow C_{n-1}$ und $D_n \rightarrow D_{n-1}$.

Sei weiter $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n > N$ die Folge

$$A'_n \longrightarrow B'_n \longrightarrow C'_n \longrightarrow D'_n$$

exakt ist.

Dann ist die natürliche Abbildung

$$\ker g / \text{im } f \longrightarrow \ker g_N / \text{im } f_N$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Sei $N \in \mathbb{N}$ mit der beschriebenen Eigenschaft. Dann betrachte das folgende kommutative Diagramm und mache Diagrammjagd.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A & \xrightarrow{f} & \text{im } f & \hookrightarrow & \ker g & \hookrightarrow & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 A_N & \xrightarrow{f_N} & \text{im } f_N & \hookrightarrow & \ker g_N & \hookrightarrow & B_N & \xrightarrow{g_N} & C_N & \xrightarrow{h_N} & D_N \\
 \uparrow p_A & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow p_B & & \uparrow p_C & & \uparrow p_D \\
 A_{N+1} & \xrightarrow{f_{N+1}} & \text{im } f_{N+1} & \hookrightarrow & \ker g_{N+1} & \hookrightarrow & B_{N+1} & \xrightarrow{g_{N+1}} & C_{N+1} & \xrightarrow{h_{N+1}} & D_{N+1} \\
 \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \ker p_A & \longrightarrow & & & \ker p_B & \longrightarrow & \ker p_C & \longrightarrow & \ker p_D & &
 \end{array} \quad (3)$$

Injektivität: Sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ker g$, sodass $b_N \in \operatorname{im} f_N$. Dann existiert ein $a_N \in A_N$, sodass $f_N(a_N) = b_N$. Da p_A surjektiv ist, existiert ein $x \in A_{N+1}$, sodass $p_A(x) = a_N$. Sei $y = f_{N+1}(x)$. Weil (3) kommutativ ist, folgt

$$p_B(y) = p_B(f_{N+1}(x)) = f_N(p_A(x)) = f_N(a_N) = b_N.$$

Da $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein kompatibles System ist, gilt zudem $p_B(b_{N+1}) = b_N$. Also ist $b_{N+1} - y \in \ker p_B$. Weil $y, b_{N+1} \in \ker g_{N+1}$, existiert aufgrund der Exaktheit der unteren Zeile ein $\tilde{x} \in \ker p_A$, sodass $f_{N+1}(\tilde{x}) = b_{N+1} - y$. Nun setze $a_{N+1} := \tilde{x} + x$. Dann ist

$$f_{N+1}(a_{N+1}) = f_{N+1}(\tilde{x} + x) = b_{N+1} - y + y = b_{N+1}$$

und

$$p_A(a_{N+1}) = p_A(\tilde{x} + x) = p_A(x) = a_N,$$

denn $\tilde{x} \in \ker p_A$. Konstruiere so induktiv eine kompatible Familie $(a_n)_{n \geq N}$ mit $f(a_n) = b_n$ für alle $n \geq N$. Für $n < N$ setze $a_n := p_{A_{n+1}}(a_{n+1})$. Die Kommutativität von (3) liefert dann, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein kompatibles System ist mit $f(a_n) = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Surjektivität: Sei $b \in \ker g_N$. Weil p_B surjektiv ist, existiert ein $y \in B_{N+1}$, sodass $p_B(y) = b$. Sei $z = g_{N+1}(y)$. Aufgrund der Kommutativität von (3) ist dann

$$p_C(z) = p_C(g_{N+1}(y)) = g_N(p_B(y)) = g_N(b) = 0,$$

also folgt $z \in \ker p_C$. Da $h_{N+1} \circ g_{N+1} = 0$ folgt

$$h_{N+1}(z) = h_{N+1}(g_{N+1}(y)) = 0.$$

Da die untere Zeile exakt ist, existiert nun ein $\tilde{y} \in \ker p_B$, sodass $g_{N+1}(\tilde{y}) = z$. Also ist $y - \tilde{y} \in \ker g_{N+1}$ und

$$p_B(y - \tilde{y}) = p_B(y) = b.$$

Setze $b_{N+1} := y - \tilde{y}$ und $b_N := b$. Dann konstruiere induktiv eine kompatible Familie $(b_n)_{n \geq N}$ mit $b_n \in \ker g_n$ für alle $n \geq N$. Für $n < N$ setze wie oben $b_n := p_{B_{n+1}}(b_{n+1})$. Erneut liefert die Kommutativität von (3), dass $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ker g$ ein kompatibles System mit $b_N = b$ ist. $\square$

Bemerkung 3.17. Falls in der Situation von 3.16, $N = 1$ gewählt werden kann, folgt wegen $A_1 = B_1 = C_1 = D_1 = 0$, dass die Folge

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

exakt ist.

Korollar 3.18. Die Klasse $\mathcal{E}$ der exakten Komplexe in $\mathcal{K}(\mathcal{A}b)$ ist abgeschlossen unter speziellen inversen Limites.

Beweis. Sei $(S_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ ein $\mathcal{E}$ -spezielles inverses System in $\mathcal{K}(\mathcal{A}b)$. Für $i \in \mathbb{Z}$ erfüllt $(S_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$ die Bedingung (R) aus 3.14. Sei also $i \in \mathbb{Z}$ beliebig. Dann erfüllt

$$(S_n^{i-1})_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow (S_n^i)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow (S_n^{i+1})_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow (S_n^{i+2})_{n \in \mathbb{N}}$$

die Bedingungen von 3.16 für $N = 1$, da nach Voraussetzung für alle $n > 1$ der Komplex $\ker(S_n^\bullet \rightarrow S_{n-1}^\bullet)$ exakt ist. Also ist die Folge

$$\begin{array}{ccccc} \varprojlim S_n^{i-1} & \longrightarrow & \varprojlim S_n^i & \longrightarrow & \varprojlim S_n^{i+1} \\ \downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow = \\ (\varprojlim S_n)^{i-1} & \longrightarrow & (\varprojlim S_n)^i & \longrightarrow & (\varprojlim S_n)^{i+1} \end{array}$$

exakt. Da $i \in \mathbb{Z}$ beliebig war, folgt dass $\varprojlim S_n$ exakt ist. $\square$

Satz 3.19. *Sei $\mathcal{B}$ eine weitere abelsche Kategorie und $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}(B)$ abgeschlossen unter speziellen inversen Limites. Angenommen inverse Limites existieren in $\mathcal{A}$ und sei $F: \mathcal{K}(A) \rightarrow \mathcal{K}(B)$ ein kovarianter Funktor, der mit inversen Limites vertauscht und gradweise zerfallende kurze exakte Folgen erhält.*

Dann ist $F^{-1}(\mathcal{J}) \subset \mathcal{K}(A)$ abgeschlossen unter speziellen inversen Limites.

Beweis. Sei $(S_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ ein $F^{-1}(\mathcal{J})$ -spezielles inverses System. Dann ist $(F(S_n^\bullet))_{n \in \mathbb{N}}$ ein $\mathcal{J}$ -spezielles inverses System, denn

- (i) $F(S_1) = F(0) = 0$, da F mit inversen Limites vertauscht und die Null der (inverse) Limes des leeren Diagramms ist.
- (ii) Für $n > 1$ ist nach Voraussetzung

$$0 \longrightarrow \ker p_n^\bullet \longrightarrow S_n^\bullet \xrightarrow{p_n} S_{n-1}^\bullet \longrightarrow 0$$

exakt, zerfällt gradweise und $\ker p_n^\bullet$ ist in $F^{-1}(\mathcal{J})$. Nach Voraussetzung ist damit

$$0 \longrightarrow F(\ker p_n^\bullet) \longrightarrow F(S_n^\bullet) \xrightarrow{F(p_n)} F(S_{n-1}^\bullet) \longrightarrow 0$$

exakt und zerfällt gradweise. Aus der Exaktheit folgt damit auch $\ker F(p_n) = F(\ker p_n)$, also $\ker F(p_n) \in \mathcal{J}$.

Also ist $F(\varprojlim S_n^\bullet) = \varprojlim F(S_n^\bullet) \in \mathcal{J}$ und damit $\varprojlim S_n^\bullet \in F^{-1}(\mathcal{J})$. □

Korollar 3.20. *Sei $\mathcal{I}$ eine Klasse von Komplexen und angenommen in $\mathcal{A}$ existieren inverse Limites.*

Dann ist die Klasse aller Komplexe $A^\bullet \in \mathcal{K}$, sodass $\text{Hom}^\bullet(T^\bullet, A^\bullet)$ exakt ist für alle $T^\bullet \in \mathcal{I}$, abgeschlossen unter speziellen inversen Limites. Insbesondere ist die Klasse der K-injektiven Komplexe abgeschlossen unter speziellen inversen Limites.

Beweis. Sei $\mathcal{E}$ die Klasse der exakten Komplexe und für $T^\bullet \in \mathcal{I}$ sei $\mathcal{H}_{T^\bullet}$ die Klasse der Komplexe $A^\bullet$, sodass $\text{Hom}^\bullet(T^\bullet, A^\bullet)$ exakt ist. Dann ist $\mathcal{H}_{T^\bullet} = \text{Hom}^\bullet(T^\bullet, -)^{-1}(\mathcal{J})$. $\mathcal{E}$ mit $\text{Hom}^\bullet(T^\bullet, -)$ erfüllt die Voraussetzungen von 3.19, denn:

- (i) Nach 3.18 ist $\mathcal{E}$ abgeschlossen unter speziellen inversen Limites.
- (ii) Wegen 2.34 vertauscht $\text{Hom}^\bullet(T^\bullet, -)$ mit Limites. Außerdem ist $\text{Hom}^\bullet(T^\bullet, -)$ gradweise additiv, erhält also gradweise zerfallende Folgen.

Also ist $\mathcal{H}_{T^\bullet}$ und damit $\bigcap_{T^\bullet \in \mathcal{I}} \mathcal{H}_{T^\bullet}$ abgeschlossen unter speziellen inversen Limites. Das Insbesondere folgt wenn $\mathcal{I} = \mathcal{E}$ gesetzt wird. □

Für die Klasse der K-injektiven Komplexe betrachten wir die duale Version von 3.12:

Definition 3.21 (Spezielles direktes System). Sei $\mathcal{P} \subset \mathcal{K}$ eine Klasse von Komplexen.

- (a) Ein direktes System $(P_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{K}$ heißt $\mathcal{P}$ -spezielles direktes System, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:
 - (i) Falls $n = 1$, dann ist $P_n^\bullet = 0$.
 - (ii) Falls $n > 1$, dann sei $C_n^\bullet$ der Kokern der natürlichen Abbildung $P_{n-1}^\bullet \rightarrow P_n^\bullet$. Dann ist $C_n^\bullet \in \mathcal{P}$ und die kurze exakte Folge

$$0 \rightarrow P_{n-1}^\bullet \rightarrow P_n^\bullet \rightarrow C_n^\bullet \rightarrow 0$$

zerfällt stufenweise.

- (b) Die Klasse $\mathcal{P}$ heißt abgeschlossen unter speziellen direkten Colimites, falls jedes $\mathcal{P}$ -spezielle direkte System in $\mathcal{K}$ einen Colimes in $\mathcal{P}$ besitzt und jeder Komplex in $\mathcal{K}$, der isomorph ist zu einem Komplex in $\mathcal{P}$, bereits in $\mathcal{P}$ ist.

Durch Umdrehen aller Pfeile, erhalten wir die duale Version von 3.13 und insbesondere die folgenden Ergebnisse:

Satz 3.22. *Sei $\mathcal{B}$ eine weitere abelsche Kategorie und $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}(B)$ abgeschlossen unter speziellen inversen Limites. Angenommen direkte Colimites existieren in $\mathcal{A}$ und sei $F: \mathcal{K}(A) \rightarrow \mathcal{K}(B)$ ein kontravarianter Funktor, der direkte Colimites in inverse Limites überführt und gradweise zerfallende kurze exakte Folgen erhält.*

Dann ist $F^{-1}(\mathcal{J}) \subset \mathcal{K}(A)$ abgeschlossen unter speziellen direkten Colimites.

Korollar 3.23. *Sei $\mathcal{I}$ eine Klasse von Komplexen und angenommen in $\mathcal{A}$ existieren direkte Colimites.*

Dann ist die Klasse aller Komplexe $A^\bullet \in \mathcal{K}$, sodass $\text{Hom}^\bullet(A^\bullet, T^\bullet)$ exakt ist für alle $T^\bullet \in \mathcal{I}$, abgeschlossen unter speziellen direkten Colimites. Insbesondere ist die Klasse der K -projektiven Komplexe abgeschlossen unter speziellen direkten Colimites.

Definition 3.24. Angenommen inverse (bzw. direkte) Limites existieren in $\mathcal{K}$ und sei $\mathcal{G}$ eine Klasse von Komplexen in $\mathcal{K}$. Dann nennen wir $\mathcal{G}$ (bzw. $\mathcal{G}$) die kleinste Klasse von Komplexen in $\mathcal{K}$, die abgeschlossen unter speziellen inversen Limites (bzw. direkten Colimites) ist und $\mathcal{G}$ enthält.

3.3 Existenz von K -projektiven und K -injektiven Auflösungen

Das Ziel dieses Abschnittes ist es nun Satz 3.3 zu beweisen. Dazu verallgemeinern wir zunächst die Begriffe K -injektive und K -projektive Auflösungen:

Definition 3.25 (Auflösungen). Sei $X^\bullet \in \mathcal{K}$ und $\mathcal{J}$ eine Klasse von Komplexen aus $\mathcal{K}$. Dann ist eine $\mathcal{J}$ -Linksauflösung ein Quasiisomorphismus $J^\bullet \rightarrow X^\bullet$ mit $J^\bullet \in \mathcal{J}$. Analog ist eine $\mathcal{J}$ -Rechtsauflösung ein Quasiisomorphismus $X^\bullet \rightarrow J^\bullet$ mit $J^\bullet \in \mathcal{J}$.

3.3.1 Linksaufösungen

Sei $\mathcal{P}$ eine Klasse von Komplexen in $\mathcal{K}$.

Lemma 3.26. *Die folgenden Bedingungen an $\mathcal{P}$ sind äquivalent:*

- (i) *Jeder nach oben beschränkte Komplex $A^\bullet \in \mathcal{K}$ hat eine $\mathcal{P}$ -Linksauflösung.*
- (ii) *Für alle $A^\bullet \in \mathcal{K}$ und $n \in \mathbb{Z}$, existiert ein $P^\bullet \in \mathcal{P}$ mit $H^i(P^\bullet) = 0$ für $i > n$ und ein Komplexhomomorphismus $f: P^\bullet \rightarrow A^\bullet$, der einen Isomorphismus $H^i(P^\bullet) \rightarrow H^i(A^\bullet)$ induziert für $i \leq n$.*

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Sei $A^\bullet \in \mathcal{K}$ und $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist $\tau_{\leq n} A^\bullet$ nach oben beschränkt, also existiert ein $P^\bullet \in \mathcal{P}$ und ein Quasiisomorphismus $s: P^\bullet \rightarrow \tau_{\leq n} A^\bullet$. Durch Komposition mit dem natürlichen Komplexhomomorphismus $\tau_{\leq n} A^\bullet \rightarrow A^\bullet$ erhalten wir ein $f: P^\bullet \rightarrow A^\bullet$. Für $i > n$ ist nun $H^i(P^\bullet) = H^i(\tau_{\leq n} A^\bullet) = 0$. Für $i \leq n$ ist $H^i(\tau_{\leq n} A^\bullet) = H^i(A^\bullet)$, also induziert f den gewünschten Isomorphismus.

(ii) $\implies$ (i): Sei $A^\bullet \in \mathcal{K}$ nach oben beschränkt. Ohne Einschränkung ist $A^i = 0$ für alle $i > 0$. Wähle $n = 0$ in (iii). Dann existiert ein $f: P^\bullet \rightarrow A^\bullet$ mit $P^\bullet \in \mathcal{P}$ und f induziert $H^i(P^\bullet) \xrightarrow{0=H^i(f)} 0 = H^i(A^\bullet)$ für $i > 0$ und $H^i(P^\bullet) \xrightarrow{H^i(f)} H^i(A^\bullet)$ für $i \leq 0$. Also ist f ein Quasiisomorphismus. $\square$

Bemerkung 3.27. Sei $A^\bullet \in \mathcal{K}$. Angenommen $\mathcal{P}$ genügt den äquivalenten Bedingungen von 3.26 und es existiert ein $n \in \mathbb{Z}$, sodass für alle $i > n$, $H^i(A^\bullet) = 0$ ist. Dann hat $A^\bullet$ eine $\mathcal{P}$ -Linksauflösung, denn nach 3.26 (ii) existiert dann ein $P^\bullet \in \mathcal{P}$ und ein Komplexhomomorphismus $f: P^\bullet \rightarrow A^\bullet$, sodass $H^i(P^\bullet) = 0 = H^i(A^\bullet)$ für $i > n$ und $H^i(f)$ ein Isomorphismus ist für $i \leq n$. Also ist f ein Quasiisomorphismus.

Beispiel 3.28. Sei $\mathcal{P}$ die Klasse der nach oben beschränkten Komplexe $P^\bullet \in \mathcal{K}$ mit P^i projektiv für alle $i \in \mathbb{Z}$. Falls $\mathcal{A}$ genügend Projektive hat, erfüllt $\mathcal{P}$ die äquivalenten Bedingungen aus 3.26.

Ein solches $P^\bullet$ ist K -projektiv, denn: Für alle eingradigen Komplexe $Q^\bullet$ mit Q^i projektiv für alle $i \in \mathbb{Z}$ ist $Q^\bullet$ nach 3.7 K -projektiv. Da nach 3.23 die Klasse der K -projektiven abgeschlossen unter speziellen direkten Colimites ist, folgt mit dem Dual von 3.13, dass $P^\bullet$ K -projektiv ist.

Erneut nach 3.23 sind die Komplexe in $\mathcal{P}$ damit ebenfalls K -projektiv.

Lemma 3.29. Sei $A^\bullet \in \mathcal{K}$. Dann existiert ein $\mathcal{P}$ -spezielles direktes System $(P_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ und ein direktes System von Kettenhomomorphismen $f_n: P_n^\bullet \rightarrow \tau_{\leq n} A^\bullet$, sodass f_n ein Quasiisomorphismus ist für alle $n \geq 2$.

Beweis. Wir gehen induktiv vor. Setze $P_1^\bullet = 0$ und $f_1 = 0$. Nach den äquivalenten Bedingungen von 3.26 existiert ein Quasiisomorphismus $f_2: P_2^\bullet \rightarrow \tau_{\leq 2} A^\bullet$ mit $P_2^\bullet \in \mathcal{P}$.

Sei nun $n \geq 3$ und seien $P_1^\bullet, \dots, P_{n-1}^\bullet$ und $f_1, \dots, f_{n-1}$ konstruiert wie im Lemma. Dann setze $P^\bullet = P_{n-1}^\bullet$ und $B^\bullet = \tau_{\leq n} A^\bullet$. Es sei $a_{n-1}: \tau_{\leq n-1} A^\bullet \rightarrow \tau_{\leq n} A^\bullet$ der natürliche Komplexhomomorphismus und $f = a_{n-1} f_{n-1}: P^\bullet \rightarrow B^\bullet$. Es gilt dann

$$f d_P = d_B f \quad (4)$$

Da $B^\bullet$ nach oben beschränkt ist und $H^i(P^\bullet) \cong H^i(\tau_{\leq n-1} A^\bullet) = 0$ für $i \gg 0$, folgt nach 2.14 $H^i(C_f^\bullet) = 0$ für $i \gg 0$. Also existiert nach 3.27 ein Quasiisomorphismus $g: Q^\bullet \rightarrow C_f^\bullet[-1]$ mit $Q^\bullet[1] \in \mathcal{P}$. Da $C_f^i[-1] = P^i \oplus B^{i-1}$ für $i \in \mathbb{Z}$, ist g gradweise gegeben durch Morphismen $g_i: Q^i \rightarrow P^i$ und $g_i'': Q^i \rightarrow B^{i-1}$ in $\mathcal{A}$.

Betrachte für $i \in \mathbb{Z}$ das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & Q^i & \xrightarrow{d_Q} & Q^{i+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow (g', g'') & & \downarrow (g', g'') & & \\ \dots & \longrightarrow & P^i \oplus B^{i-1} & \xrightarrow{d_{C_f[-1]}} & P^{i+1} \oplus B^i & \longrightarrow & \dots \end{array} \quad (5)$$

In Matrixnotation ist

$$d_{C_f} = \begin{pmatrix} d_{P[1]} & 0 \\ f[1] & d_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_P & 0 \\ f & d_B \end{pmatrix}$$

Also folgt

$$d_{C_f}[-1] = -d_{C_f} = \begin{pmatrix} d_P & 0 \\ -f & -d_B \end{pmatrix}.$$

Auswerten der Kommutativität von (5) in beiden Summanden liefert nun

$$d_P g' = g' d_Q \quad (6)$$

$$-f g' - d_B g'' = g'' d_Q. \quad (7)$$

Aus (6) folgt, dass $g': Q^\bullet \rightarrow P^\bullet$ ein Komplexhomomorphismus ist. Setze nun $h: C_{-g'}^\bullet \rightarrow B^\bullet$ durch

$$h(x, y) = g''[1](x) + f(y).$$

Betrachte für $i \in \mathbb{Z}$ das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & Q^{i+1} \oplus P^i & \xrightarrow{d_{C_{-g'}}} & Q^{i+2} \oplus P^{i+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow h & & \downarrow h & & \\ \dots & \longrightarrow & B^i & \xrightarrow{d_B} & B^{i+1} & \longrightarrow & \dots \end{array} .$$

In Matrixnotation ist

$$\begin{aligned} hd_{C_{-g'}} &= (g'' \quad f) \begin{pmatrix} -d_Q & 0 \\ -g' & d_P \end{pmatrix} \\ &= (-g''d_Q - fg' \quad fd_P) \\ &\stackrel{(7)}{=} (d_B g'' \quad fd_P) \\ &\stackrel{(4)}{=} (d_B g'' \quad d_B f) \\ &= d_B h. \end{aligned}$$

Also ist h ein Komplexhomomorphismus. Bleibt zu zeigen, dass h ein Quasiisomorphismus ist. Dafür genügt es nach 2.13 zu zeigen, dass $C_h^\bullet$ exakt ist. Behauptung: $C_h^\bullet = C_{-g}^\bullet[1]$.

Es ist gradweise für $i \in \mathbb{Z}$

$$C_h^i = C_{-g'}^{i+1} \oplus B^i = (Q^{i+2} \oplus P^{i+1}) \oplus B^i = Q^{i+2} \oplus (P^{i+1} \oplus B^i) = Q^{i+2} \oplus C_f^i = C_{-g}^i[1].$$

Für die Differentiale gilt, wieder in Matrixnotation:

$$d_{C_h} = \begin{pmatrix} d_{C_{-g'}[1]} & 0 \\ h[1] & d_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\begin{pmatrix} -d_Q & 0 \\ -g' & d_P \end{pmatrix} & 0 \\ \begin{pmatrix} g'' & f \end{pmatrix} & d_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_Q & 0 & 0 \\ g' & -d_P & 0 \\ g'' & f & d_B \end{pmatrix}.$$

Analog folgt

$$d_{C_{-g}[1]} = \begin{pmatrix} d_{Q[1]} & 0 \\ -g[1] & d_{C_f[-1]} \end{pmatrix} [1] = - \begin{pmatrix} -d_Q & 0 \\ \begin{pmatrix} -g' \\ -g'' \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} -d_P & 0 \\ f & d_B \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_Q & 0 & 0 \\ g' & -d_P & 0 \\ g'' & f & d_B \end{pmatrix}.$$

Also folgt die Behauptung. Da g und demnach $-g$ ein Quasiisomorphismus ist und Verschieben Exaktheit erhält, folgt damit mit 2.13 die Exaktheit von $C_h^\bullet = C_{-g}^\bullet[1]$.

Setze nun $P_n^\bullet := C_{-g'}^\bullet$ und $f_n := h$. Sei $p_{n-1}: P_{n-1}^\bullet = P^\bullet \rightarrow P_n^\bullet$ die natürliche Abbildung. Dann ist p_{n-1} gradweise gegeben durch die natürliche Inklusion $P^i \rightarrow Q^{i+1} \oplus P^i$. Also folgt $\text{coker } p_{n-1} = Q^\bullet[1] \in \mathcal{P}$ und wir haben gradweise zerfallende exakte Folgen:

$$0 \longrightarrow P^i \xrightarrow{p_{n-1}} Q^{i+1} \oplus P^i \longrightarrow Q^{i+1} \longrightarrow 0 .$$

Also ist $(P_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ ein $\mathcal{P}$ -spezielles direktes System. Außerdem ist nach Definition von h : $f_n p_{n-1} = h p_{n-1} = f = a_{n-1} f_{n-1}$, also kommutiert

$$\begin{array}{ccc} P_{n-1}^\bullet & \xrightarrow{p_{n-1}} & P_n^\bullet \\ \downarrow f_{n-1} & & \downarrow f_n = h \\ \tau_{\leq n-1} A^\bullet & \xrightarrow{a_{n-1}} & \tau_{\leq n} A^\bullet \end{array}$$

und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ein direktes System. □

Daraus folgt nun sofort:

Satz 3.30. *Angenommen direkte Colimites existieren in $\mathcal{A}$ und $\varinjlim$ ist exakt. Dann hat jeder Komplex in $\mathcal{K}$ eine $\mathcal{P}$ -Linksauflösung.*

Beweis. Sei $A^\bullet \in \mathcal{K}$ und $(P_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}, (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie in 3.29. Da direkte Colimites in $\mathcal{A}$ existieren und sich diese in $\mathcal{K}$ gradweise bilden, existieren direkte Colimites in $\mathcal{K}$. Nach der Definition von $\mathcal{P}$ ist dann $P^\bullet := \varinjlim P_n^\bullet$ in $\mathcal{P}$.

Wir erhalten ebenfalls

$$f := \varinjlim f_n: P^\bullet \longrightarrow \varinjlim \tau_{\leq n} A^\bullet = A^\bullet.$$

Da $\varinjlim$ exakt ist, folgt für $i \in \mathbb{Z}$:

$$H^i(f) = H^i(\varinjlim f_n) = \varinjlim \underbrace{H^i(f_n)}_{\text{Isomorphismus}}.$$

Also ist f ein Quasiisomorphismus. $\square$

Korollar 3.31. *Angenommen direkte Colimites existieren in $\mathcal{A}$ und $\varinjlim$ ist exakt. Falls $\mathcal{A}$ außerdem genug Projektive hat, besitzt jeder Komplex in $\mathcal{K}$ eine K -projektive Auflösung.*

Beweis. Wähle $\mathcal{P}$ wie in Beispiel 3.28 und wende 3.30 an. $\square$

3.3.2 Rechtsauflösungen

Sei $\mathcal{I}$ eine Klasse von Komplexen in $\mathcal{K}$. Im Folgenden nehmen wir an, dass $\mathcal{I}$ die folgende Eigenschaft erfüllt:

Jeder nach unten beschränkte Komplex $A^\bullet \in \mathcal{K}$ hat eine $\mathcal{I}$ -Rechtsauflösung.

Beispiel 3.32. Falls $\mathcal{A}$ genügend Injektive hat, können wir, dual zu Beispiel 3.28, $\mathcal{I}$ als die Klasse der nach unten beschränkten Komplexe mit in $\mathcal{A}$ injektiven Objekten wählen.

Durch Umdrehen der Pfeile erhalten wir die duale Aussagen von 3.29 und 3.30:

Lemma 3.33. *Sei $A^\bullet \in \mathcal{K}$. Dann existiert ein $\mathcal{I}$ -spezielles inverses System $(I_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ und ein inverses System von Kettenhomomorphismen $f_n: \tau^{\geq -n} A^\bullet \rightarrow I_n^\bullet$, sodass f_n ein Quasiisomorphismus ist für $n \geq 2$.*

Satz 3.34. *Angenommen inverse Limites existieren in $\mathcal{A}$ und $\varprojlim$ ist exakt. Dann hat jeder Komplex in $\mathcal{K}$ eine $\mathcal{I}$ -Rechtsauflösung.*

Bemerkung 3.35. Leider findet 3.34 in $\mathcal{A} = R\text{-Mod}$ für einen Ring R keine Anwendung, da hier $\varprojlim$ nicht exakt ist.

Diese Voraussetzung wird jedoch nur verwendet, um zu zeigen, dass $f = \varprojlim f_n: A^\bullet \rightarrow \varprojlim I_n^\bullet$ ein Quasiisomorphismus ist. Wir können uns der speziellen Struktur des inversen Systems $(I_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ bedienen, um für $\mathcal{A} = R\text{-Mod}$ zu zeigen, dass f dennoch ein Quasiisomorphismus ist.

Satz 3.36. *Sei R ein Ring und $\mathcal{A}$ die Kategorie der R -links-Moduln. Dann hat jeder Komplex in $\mathcal{K}$ eine K -injektive Auflösung.*

Beweis. Seien $(I_n^\bullet)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie in 3.33. Seien $I^\bullet = \varprojlim I_n^\bullet$ und $f = \varprojlim f_n$. Es genügt zu zeigen, dass f ein Quasiisomorphismus ist.

Sei $i \in \mathbb{Z}$ beliebig. Für $n \geq 3$ haben wir folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} I^\bullet & \longrightarrow & I_n^\bullet & \xrightarrow{p_n} & I_{n-1}^\bullet \\ \downarrow f & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ A^\bullet & \longrightarrow & \tau^{\geq -n} A^\bullet & \longrightarrow & \tau^{\geq -(n-1)} A^\bullet \end{array}$$

Wende nun $H^i(-)$ auf dieses Diagramm an:

$$\begin{array}{ccccc}
 H^i(I^\bullet) & \longrightarrow & H^i(I_n^\bullet) & \xrightarrow{H^i(p_n)} & H^i(I_{n-1}^\bullet) \\
 \downarrow H^i(f) & & \sim \downarrow H^i(f_n) & & \sim \downarrow H^i(f_{n-1}) \\
 H^i(A^\bullet) & \longrightarrow & H^i(\tau^{\geq -n} A^\bullet) & \longrightarrow & H^i(\tau^{\geq -(n-1)} A^\bullet)
 \end{array} \quad (8)$$

Die rechten beiden vertikalen Pfeile sind Isomorphismen, da f_k ein Quasiisomorphismus ist für alle $k \geq 2$.

Sei nun $n \geq -i + 1$. Dann ist $i \geq -n + 1 \geq -n$, also ist $H^i(A^\bullet) = H^i(\tau^{\geq -n} A^\bullet) = H^i(\tau^{\geq -(n-1)} A^\bullet)$. Also sind die Morphismen in der unteren Zeile von (8) Isomorphismen und damit ist $H^i(p_n): H^i(I_n^\bullet) \rightarrow H^i(I_{n-1}^\bullet)$ ein Isomorphismus.

Betrachte nun die kurze exakte Folge

$$0 \longrightarrow \ker p_n \longrightarrow I_n^\bullet \xrightarrow{p_n} I_{n-1}^\bullet \longrightarrow 0.$$

Das liefert für $j \in \mathbb{Z}$ eine lange exakte Kohomologiefolge:

$$H^{j-1}(I_n^\bullet) \xrightarrow{H^{j-1}(p_n)} H^{j-1}(I_{n-1}^\bullet) \longrightarrow H^j(\ker p_n) \longrightarrow H^j(I_n^\bullet) \xrightarrow{H^j(p_n)} H^j(I_{n-1}^\bullet) \quad (9)$$

Anwenden des obigen Arguments für $i = j$ und $i = j - 1$ liefert für $n \geq -(j - 1) + 1 \geq -j + 1$ Isomorphismen $H^j(p_n)$ und $H^{j-1}(p_n)$. Aufgrund der Exaktheit von (9) folgt, dass $H^j(\ker p_n) = 0$ für alle $n \geq -(j - 1) + 1 = -j + 2$.

Sei nun $m \in \mathbb{Z}$ beliebig. Dann setze $N := -m + 1$. Dann ist für alle $n > N$:

$$H^m(\ker p_n) = 0 = H^{m+1}(\ker p_n).$$

Also ist die Folge

$$\ker p_n^{m-1} \longrightarrow \ker p_n^m \longrightarrow \ker p_n^{m+1} \longrightarrow \ker p_n^{m+2} \quad (10)$$

für $n > N$ exakt. Das System

$$(I_n^{m-1})_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow (I_n^m)_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow (I_n^{m+1})_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow (I_n^{m+2})_{n \in \mathbb{N}}$$

erfüllt damit die Bedingungen von 3.16. Also ist die natürliche Abbildung

$$H^m(I^\bullet) \longrightarrow H^m(I_N^\bullet)$$

ein Isomorphismus. Erneute Betrachtung des linken Vierecks von (8) für $i = m$ und $n = N$ liefert nun, dass $H^i(f)$ ein Isomorphismus ist. $\square$

Bemerkung 3.37. Damit ist 3.3 bewiesen.

4 Ableitungen und Adjunktion

Sei R ein Ring und im Folgenden $\mathcal{A}$ die Kategorie der R (links-)Moduln.

4.1 Abgeleitete $\text{Hom}^\bullet$ Funktoren

Satz 4.1. *Seien $M^\bullet, N^\bullet \in \mathcal{D}$. Dann ist $\text{RHom}^\bullet(M^\bullet, N^\bullet)$ wohldefiniert und kann mithilfe einer K -projektiven Auflösung von $M^\bullet$ oder einer K -injektiven Auflösung von $N^\bullet$ berechnet werden.*

Beweis. In der Notation von 2.29 wähle $\mathcal{L}$ als die volle Unterkategorie der K -injektiven Komplexe von $\mathcal{K}$. Dann ist für $M^\bullet \in \mathcal{K}$ beliebig:

- (i) $\mathcal{L}$ ist trianguliert nach 3.8.
- (ii) Für alle $N^\bullet \in \mathcal{K}$ existiert wegen 3.36 ein Quasiisomorphismus $N^\bullet \rightarrow I^\bullet$ mit $I^\bullet \in \mathcal{L}$.
- (iii) Nach 3.6 erhält $\text{Hom}^\bullet(M^\bullet, -)|_{\mathcal{L}}$ Exaktheit von Komplexen.

Also existiert $\text{RHom}^\bullet(M^\bullet, -)$. Analog berechnet sich $\text{RHom}^\bullet(-, N^\bullet)$ für $N^\bullet \in \mathcal{K}$ unter Wahl von $\mathcal{L}$ als die volle Unterkategorie der K -projektiven Komplexe von $\mathcal{K}$. Beide Ableitungen stimmen überein, denn für $M^\bullet, N^\bullet \in \mathcal{K}$ beliebig und $P^\bullet \rightarrow M^\bullet$ und $N^\bullet \rightarrow I^\bullet$ K -projektive bzw. K -injektive Auflösungen gilt mit wiederholter Anwendung von 2.29 und wegen $P^\bullet \cong M^\bullet$ und $N^\bullet \cong I^\bullet$ in $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} \text{RHom}^\bullet(M^\bullet, -)(N^\bullet) &= \text{RHom}^\bullet(P^\bullet, -)(I^\bullet) \\ &= \text{Hom}^\bullet(P^\bullet, I^\bullet) \\ &= \text{RHom}^\bullet(-, I^\bullet)(P^\bullet) \\ &= \text{RHom}^\bullet(-, N^\bullet)(M^\bullet). \end{aligned}$$

□

4.2 Abgeleitetes Tensorprodukt

Sei von nun an $R = A$ ein kommutativer Ring. Um das Tensorprodukt abzuleiten, benötigen wir noch eine weitere Klasse von Komplexen in $\mathcal{K}$:

Definition 4.2 (K -flach). Ein Komplex $M^\bullet \in \mathcal{K}$ heißt K -flach, wenn der Funktor $M^\bullet \otimes_A -$ Exaktheit von Komplexen erhält. Eine K -flache Auflösung eines Komplexes $N^\bullet \in \mathcal{K}$ ist ein Quasiisomorphismus $M^\bullet \rightarrow N^\bullet$ mit $P^\bullet \in \mathcal{K}$ K -flach.

Satz 4.3. *Sei $M^\bullet \in \mathcal{K}$ mit $M^i = 0$ für $i \neq 0$. Dann ist $M^\bullet$ genau dann K -flach, wenn M^0 flacher A -Modul ist.*

Beweis. Sei $M^\bullet \in \mathcal{K}$ wie im Satz. Dann ist für $S^\bullet \in \mathcal{K}$ und $n \in \mathbb{Z}$:

$$(M^\bullet \otimes_A S^\bullet)^n = \bigoplus_{i+j=n} M^i \otimes_A S^j = M^0 \otimes S^n = (M^0 \otimes S^\bullet)^n$$

und für $m \in M^0, s \in S^n$:

$$d_{M^\bullet \otimes_A S^\bullet}^n(m \otimes s) = \underbrace{d_M^0(m)}_{=0} \otimes_A s + (-1)^0 m \otimes_A d_S(s) = m \otimes_A d_S(s) = d_{M^0 \otimes_A S^\bullet}.$$

Also ist $M^\bullet \otimes_A S^\bullet = M^0 \otimes_A S^\bullet$. Damit folgt die Behauptung aus den Definitionen. □

Im Folgenden benötigen wir folgendes Kriterium für die Exaktheit von Komplexen:

Lemma 4.4. *Sei $A^\bullet \in \mathcal{K}$. Angenommen für jeden K -injektiven Komplex $I^\bullet \in \mathcal{K}$ ist $\text{Hom}^\bullet(A^\bullet, I^\bullet)$ exakt. Dann ist $A^\bullet$ exakt.*

Beweis. Sei $B^\bullet \in \mathcal{K}$ beliebig. Dann existiert nach 3.36 ein K-injektiver Komplex $I^\bullet \in \mathcal{K}$ und ein Quasiisomorphismus $B^\bullet \rightarrow I^\bullet$. Dann gilt $B^\bullet \cong I^\bullet$ in $\mathcal{D}$ und wir erhalten

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(A^\bullet, B^\bullet) \cong \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(A^\bullet, I^\bullet) \stackrel{3.11}{=} \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(A^\bullet, I^\bullet) = 0.$$

Mit Yoneda folgt nun, dass $A^\bullet \cong 0$ in $\mathcal{D}$. Da $H^i(-): \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{A}b$ über den kanonischen Funktor $Q: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{D}$ faktorisiert, folgt $H^i(A^\bullet) = 0$ für $i \in \mathbb{Z}$, also ist $A^\bullet$ exakt. $\square$

Satz 4.5. *Sei $M^\bullet \in \mathcal{K}$. Dann sind äquivalent:*

- (i) $M^\bullet$ ist K-flach.
- (ii) $\mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet, I^\bullet)$ ist K-injektiv für jeden K-injektiven Komplex $I^\bullet \in \mathcal{K}$.

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Sei $I^\bullet$ K-injektiv und $S^\bullet$ exakt. Dann ist

$$\mathrm{Hom}^\bullet(S^\bullet, \mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet, I^\bullet)) \stackrel{2.36}{=} \mathrm{Hom}^\bullet(\underbrace{S^\bullet \otimes_A M^\bullet}_{\text{exakt}}, \underbrace{I^\bullet}_{\text{K-injektiv}}).$$

Weil $M^\bullet$ K-flach ist, folgt $S^\bullet \otimes_A M^\bullet$ exakt, also wegen $I^\bullet$ K-injektiv, die Behauptung.

(ii) $\implies$ (i): Sei $S^\bullet$ exakt. Wegen 4.4 genügt es zu zeigen, dass für jeden K-injektiven Komplex $I^\bullet \in \mathcal{K}$, $\mathrm{Hom}^\bullet(S^\bullet \otimes_A M^\bullet, I^\bullet)$ exakt ist. Dazu sei $I^\bullet$ ein K-injektiver Komplex. Dann ist

$$\mathrm{Hom}^\bullet(S^\bullet \otimes_A M^\bullet, I^\bullet) \stackrel{2.36}{=} \mathrm{Hom}^\bullet(\underbrace{S^\bullet}_{\text{exakt}}, \underbrace{\mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet, I^\bullet)}_{\text{K-injektiv}})$$

exakt. $\square$

Satz 4.6. (a) Falls $M^\bullet, N^\bullet \in \mathcal{K}$ K-flach sind, dann ist auch $M^\bullet \otimes_A N^\bullet$ K-flach.

(b) $M^\bullet \in \mathcal{K}$ ist K-flach genau dann wenn $M^\bullet[1]$ K-flach ist.

(c) Falls zwei Punkte eines ausgezeichneten Dreiecks in $\mathcal{K}$ K-flach sind, dann auch der dritte. Insbesondere ist die volle Unterkategorie der K-flachen Komplexe in $\mathcal{K}$ eine triangulierte Unterkategorie.

Beweis. (a) Seien $M^\bullet, N^\bullet \in \mathcal{K}$ K-flach und $S^\bullet$ exakt. Dann ist

$$(M^\bullet \otimes_A N^\bullet) \otimes S^\bullet = M^\bullet \otimes_A (N^\bullet \otimes_A S^\bullet)$$

und die rechte Seite ist exakt.

(b) Seien $S^\bullet, M^\bullet \in \mathcal{K}$. Dann sind $- \otimes_A S^\bullet$ und $M^\bullet \otimes_A -$ nach 2.35 triangulierte Funktoren, also folgt

$$M^\bullet[1] \otimes_A S^\bullet = (M^\bullet \otimes_A S^\bullet)[1] = M^\bullet \otimes_A S^\bullet[1].$$

Da Verschieben Exaktheit erhält, folgt daraus die Äquivalenz.

(c) Sei $(M^\bullet, N^\bullet, P^\bullet, u, v, w)$ ein ausgezeichnetes Dreieck in $\mathcal{K}$ mit $M^\bullet$ und $N^\bullet$ K-flach. Sei weiter $S^\bullet$ exakt. Da $- \otimes_A S^\bullet$ nach 2.35 ein triangulierter Funktor ist, erhalten wir das ausgezeichnete Dreieck $(M^\bullet \otimes_A S^\bullet, N^\bullet \otimes_A S^\bullet, P^\bullet \otimes_A S^\bullet, u \otimes \mathrm{id}_{S^\bullet}, v \otimes \mathrm{id}_{S^\bullet}, w \otimes \mathrm{id}_{S^\bullet})$ und damit für $i \in \mathbb{Z}$ die exakte Folge

$$H^i(N^\bullet \otimes_A S^\bullet) \longrightarrow H^i(P^\bullet \otimes_A S^\bullet) \longrightarrow H^{i+1}(M^\bullet \otimes_A S^\bullet).$$

Da die äußeren Terme nach Voraussetzung 0 sind, folgt die Exaktheit von $P^\bullet \otimes_A S^\bullet$ und damit, dass $P^\bullet$ K-flach ist. Der allgemeine Fall folgt nun mit 2.1. $\square$

Satz 4.7. *Sei $M^\bullet \in \mathcal{K}$ K -projektiv. Dann ist $M^\bullet$ K -flach. Insbesondere hat jeder Komplex $N^\bullet \in \mathcal{K}$ eine K -flache Auflösung.*

Beweis. Sei $M^\bullet$ K -projektiv und $S^\bullet$ exakt. Sei weiter $I^\bullet$ K -injektiv. Dann folgt

$$\mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet \otimes_A S^\bullet, I^\bullet) \stackrel{2.36}{=} \mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet, \mathrm{Hom}^\bullet(S^\bullet, I^\bullet)).$$

Es ist $\mathrm{Hom}^\bullet(S^\bullet, I^\bullet)$ exakt, da $I^\bullet$ K -injektiv und damit die rechte Seite, da $M^\bullet$ K -projektiv ist. Also folgt die Behauptung mit 4.4. Das Insbesondere folgt nun aus 3.31. $\square$

Satz 4.8. *Sei $M^\bullet \in \mathcal{K}$ K -flach und exakt. Dann ist $M^\bullet \otimes_A N^\bullet$ exakt für alle $N^\bullet \in \mathcal{K}$.*

Beweis. Sei $M^\bullet \in \mathcal{K}$ K -flach und exakt und sei $N^\bullet \in \mathcal{K}$ beliebig. Dann existiert nach 4.7 ein K -flacher Komplex $P^\bullet \in \mathcal{K}$ und ein Quasiisomorphismus $P^\bullet \rightarrow N^\bullet$. Da $M^\bullet$ K -flach ist, erhält $M^\bullet \otimes_A -$ nach 2.15 Quasiisomorphismen. Damit folgt

$$H^i(M^\bullet \otimes_A N^\bullet) = H^i(M^\bullet \otimes_A P^\bullet). \quad (11)$$

Da $P^\bullet$ K -flach ist, folgt mit der Exaktheit von $M^\bullet$, dass $M^\bullet \otimes_A P^\bullet$ exakt ist. Damit folgt die Behauptung aus (11). $\square$

Damit erhalten wir:

Satz 4.9. *Seien $M^\bullet, N^\bullet \in \mathcal{D}$. Dann ist $M^\bullet \otimes_A^L N^\bullet$ wohldefiniert und kann mithilfe einer K -flachen Auflösung einer der Faktoren berechnet werden.*

Beweis. In der Notation (der Linksableitungsversion) von 2.29 wähle $\mathcal{L}$ als die volle Unterkategorie der K -flachen Komplexe von $\mathcal{K}$. Dann ist für $N^\bullet$ beliebig:

- (i) $\mathcal{L}$ ist trianguliert nach 4.6.
- (ii) Für alle $M^\bullet \in \mathcal{K}$ existiert nach 4.7 ein Quasiisomorphismus $P^\bullet \rightarrow M^\bullet$ mit $P^\bullet \in \mathcal{L}$.
- (iii) Nach 4.8 erhält $N^\bullet \otimes_A -|_{\mathcal{L}}$ Exaktheit von Komplexen.

Also existiert $N^\bullet \otimes_A^L -$. Analog zeigt man die Existenz von $-\otimes_A^L N^\bullet$ und wie im Beweis von 4.1, dass beide Ableitungen übereinstimmen. $\square$

4.3 Adjunktion

Jetzt können wir alles zusammentragen und erhalten:

Satz 4.10. *Seien $M^\bullet, N^\bullet, P^\bullet \in \mathcal{D}$. Dann existiert ein natürlicher Isomorphismus, der funktoriell in allen Variablen ist:*

$$R\mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet \otimes_A^L N^\bullet, P^\bullet) = R\mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet, R\mathrm{Hom}^\bullet(N^\bullet, P^\bullet)).$$

Beweis. Nach 4.1 und 4.9 sind alle Terme wohldefiniert und wir können mit 4.7 ohne Einschränkung annehmen, dass $N^\bullet$ K -flach ist, und mit 3.36, dass $P^\bullet$ K -injektiv ist.

Dann folgt

$$\begin{aligned} R\mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet \otimes_A^L N^\bullet, P^\bullet) &= R\mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet \otimes_A N^\bullet, P^\bullet) \\ &= \mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet \otimes_A N^\bullet, P^\bullet) \\ &\stackrel{2.36}{=} \mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet, \mathrm{Hom}^\bullet(N^\bullet, P^\bullet)) \\ &= R\mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet, \mathrm{Hom}^\bullet(N^\bullet, P^\bullet)) \\ &= R\mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet, R\mathrm{Hom}^\bullet(N^\bullet, P^\bullet)). \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, weil nach 4.5 $\mathrm{Hom}^\bullet(N^\bullet, P^\bullet)$ K -injektiv ist. $\square$

Korollar 4.11. *Seien $M^\bullet, N^\bullet, P^\bullet \in \mathcal{D}$. Dann existiert ein natürlicher Isomorphismus, der funktoriell in allen Variablen ist:*

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(M^\bullet \otimes_A^L N^\bullet, P^\bullet) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(M^\bullet, R\mathrm{Hom}^\bullet(N^\bullet, P^\bullet)).$$

Insbesondere gilt folgende Funktoradjunktion in $\mathcal{D}$:

$$- \otimes_A^L N \dashv R\mathrm{Hom}^\bullet(N^\bullet, -).$$

Beweis. Wir können wieder annehmen, dass $N^\bullet$ K-flach und $P^\bullet$ K-injektiv ist. Dann betrachte:

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(M^\bullet \otimes_A^L N^\bullet, P^\bullet) &\stackrel{3.11}{=} \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(M^\bullet \otimes_A^L N^\bullet, P^\bullet) \\ &\stackrel{2.33}{=} H^0 \mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet \otimes_A^L N^\bullet, P^\bullet) \\ &= H^0 \mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet \otimes_A N^\bullet, P^\bullet) \\ &\stackrel{2.36}{=} H^0 \mathrm{Hom}^\bullet(M^\bullet, \mathrm{Hom}^\bullet(N^\bullet, P^\bullet)) \\ &\stackrel{2.33}{=} \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}}(M^\bullet, \mathrm{Hom}^\bullet(N^\bullet, P^\bullet)) \\ &\stackrel{3.11}{=} \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(M^\bullet, \mathrm{Hom}^\bullet(N^\bullet, P^\bullet)) \\ &= \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(M^\bullet, R\mathrm{Hom}^\bullet(N^\bullet, P^\bullet)). \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt erneut, weil nach 4.5 $\mathrm{Hom}^\bullet(N^\bullet, P^\bullet)$ K-injektiv ist. $\square$

Literatur

- [1] Robin Hartshorne. *Residues and duality*. Lecture Notes in Mathematics, No. 20. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966. Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64, With an appendix by P. Deligne.
- [2] N. Spaltenstein. Resolutions of unbounded complexes. *Compositio Math.*, 65(2):121–154, 1988.
- [3] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.