

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	Σ
Punkte					

Aufgabe 1. (a) Es seien $f: V \rightarrow W$ und $g: W \rightarrow V$ lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen V und W .

Beh.: Es existiert genau dann ein $v \in V \setminus \{0\}$ mit $(g \circ f)(v) = v$, wenn es ein $w \in W \setminus \{0\}$ gibt mit $(f \circ g)(w) = w$.

Beweis. „ $\implies$ “ Es sei $w \in W$ mit $(f \circ g)(w) = w$. Dann definiere $v := g(w)$. Wegen $f(g(w)) = f(v) = w$ folgt $g(f(v)) = g(w) = v$.

„ $\impliedby$ “ folgt analog. □

(b) Es sei $A \in M_{n,m}(K)$ und $B \in M_{m,n}(K)$.

Beh.: $E_n - AB$ invertierbar $\iff E_m - BA$ invertierbar.

Beweis. „ $\implies$ “ Es seien $a: K^m \rightarrow K^n$ und $b: K^n \rightarrow K^m$ die zu A und B gehörigen Abbildungen.

Da $E_n - AB$ invertierbar, folgt $id_{K^n} - a \circ b$ ist Automorphismus. Also ist zu zeigen, dass der Endomorphismus $id_{K^m} - b \circ a$ bijektiv ist.

Da $id_{K^n} - a \circ b$ bijektiv, insbesondere injektiv ist, folgt

$$\begin{aligned} \ker(id_{K^n} - a \circ b) &= \{0\} \\ \implies id_{K^n}(v) - a(b(v)) &\neq 0 \quad \forall v \in V \setminus \{0\} \\ \implies v &\neq a(b(v)) \quad \forall v \in V \setminus \{0\} \quad (*) \end{aligned}$$

Sei nun $w \in K^m$ mit $id_{K^m} - b(a(w)) = 0$.

$$\begin{aligned} \implies w &= b(a(w)) \\ \stackrel{(a) \text{ und } *}{\implies} w &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist $id_{K^m} - b \circ a$ ein injektiver Endomorphismus, also auch bijektiv, also Automorphismus. $\implies E_m - BA$ invertierbar.

„ $\impliedby$ “ folgt analog. □

Aufgabe 2. Es sei K Körper und $A \in M_{n,m}(K)$ und $B \in M_{m,n}(K)$ mit $ABA = A$.

(a) Beh.: $\ker A = \{x - BAx \mid x \in K^m\}$

Beweis. Zz.: $\ker A \subset \{x' - BAx' \mid x' \in K^m\}$

Sei $x \in \ker A$, d.h. $Ax = 0$, damit:

$$\begin{aligned} x - BAx &= x - B \cdot 0 = x \\ \implies x &\in \{x' - BAx' \mid x' \in K^m\}. \end{aligned}$$

Zz.: $\{x - BAx \mid x \in K^m\} \subset \ker A$

Sei $r \in K^m$, dann $x := r - BA r$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} Ax &= Ar - ABAr \stackrel{ABA=A}{=} Ar - Ar = 0 \\ \implies x &\in \ker A. \end{aligned}$$

□

(b) Beh.: $Ax = b$ hat eine Lösung $\iff ABb = b$

Beweis.

$$\begin{aligned}
 Ax = b & \text{ hat eine Lösung} \\
 \iff b \in \text{Bild}(A) \\
 \iff \exists x \in K^m: Ax = ABAx = AB(Ax) = b \\
 \iff ABb = b.
 \end{aligned}$$

□

$$\text{Beh.: } L := \{x \in K^m \mid Ax = b\} = \{Bb + x' - BAx' \mid x' \in K^m\}$$

Beweis. (i) Zz.: $L \subset \{Bb + x - BAx \mid x \in K^m\}$,

Sei $x \in L$ beliebig, d.h. $Ax = b$. Nun g.z.z. $\exists r \in K^m: x = Bb + r - BA r$. Wähle $k := x - Bb \in K^m$. Damit:

$$\begin{aligned}
 Ak &= Ax - ABb \stackrel{ABb=b}{=} b - b = 0 \\
 \implies k &\in \ker(A) \\
 \stackrel{(a)}{\implies} \exists r &\in K^m: k = r - BA r. \text{ Fixiere } r \\
 \implies Bb + r - BA r &= Bb + k = Bb + x - Bb = x.
 \end{aligned}$$

(ii) Zz.: $\{Bb + x - BAx \mid x \in K^m\} \subset L$.

Sei $r \in K^m$ beliebig, dann definiere $x := Bb + r - BA r \in K^m$. Nun g.z.z. $Ax = b$.

$$Ax = ABb + Ar - ABAr \stackrel{ABb=b}{=} b + Ar - ABAr \stackrel{ABA=A}{=} b.$$

□

Aufgabe 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\implies$ Rang 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}^{-2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}^{-1} \mid \cdot -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\implies$ Rang 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\implies$ Rang 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}^{-2} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\implies$ Rang 1

Für $a = 1$ folgt direkt:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}^{-1} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Rang 1

Für $a = -1$ folgt

$$\begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right]^{-1} \cdot -1 \\ \leftarrow_+ \\ \leftarrow_+ \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Rang 0

Für $a \neq 1 \wedge a \neq -1 \Rightarrow 1 - a^2 \neq 0$, damit:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right]^{-1} \\ \leftarrow_+ \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right]^{-a} \\ \leftarrow_+ \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 - a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left| \cdot \frac{1}{1 - a^2} \right. \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow_+ \\ \left[\begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right]^{-a} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Rang 2

Aufgabe 4. (a) Beh.: $\underline{v} = ((1, 2)^t, (0, -1)^t)$ ist Basis von $\mathbb{Q}^2$.

Beweis. Zu zeigen.: $\underline{v}$ ist linear unabhängig

Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ mit

$$\begin{aligned} a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow a &= 0 \wedge 2a - b = 0 \Rightarrow b = 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \underline{v}$ ist linear unabhängig und wegen $\dim \mathbb{Q}^2 = 2$ eine Basis von $\mathbb{Q}^2$. □

Beh.: $\underline{w} = ((1, 1)^t, (3, 2)^t)$ ist Basis von $\mathbb{Q}^2$

Beweis. Zu zeigen.: $\underline{w}$ ist linear unabhängig

Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ mit

$$\begin{aligned} a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow a + 3b &= 0 \wedge a + 2b = 0 \Rightarrow b = a = 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \underline{w}$ ist linear unabhängig und wegen $\dim \mathbb{Q}^2 = 2$ eine Basis von $\mathbb{Q}^2$. □

Beh.:

$$T = M_{\underline{e}}^{\underline{v}}(\text{id}_V) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Zu Überprüfen für die zwei Basisvektoren aus $\underline{v}$.

(i) $v_1 = (1, 2)^t$. $\phi(v_1) = (1, 0)^t$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) $v_2 = (0, -1)^t$. $\phi(v_2) = (0, 1)^t$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

□

Beh.:

$$T = M_{\underline{e}}^{\underline{w}}(\text{id}_V) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Zu Überprüfen für die zwei Basisvektoren aus $\underline{w}$.

(i) $w_1 = (1, 1)^t$. $\phi(w_1) = (1, 0)^t$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) $w_2 = (3, 2)^t$. $\phi(w_2) = (0, 1)^t$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

□

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{-2} \\ \leftarrow_+ \end{matrix} \mid \cdot_{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T = (M_{\underline{e}}^{\underline{v}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{-1} \\ \leftarrow_+ \end{matrix} \mid \cdot_{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{+} \\ \leftarrow_+ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow S = (M_{\underline{e}}^{\underline{w}})^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) $M_{\underline{e}}^{\underline{e}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ durch ablesen, die restlichen Matrizen ergeben sich durch Multiplikation:

$$M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(f) = M_{\underline{v}}^{\underline{e}}(\text{id}_V) \cdot M_{\underline{e}}^{\underline{e}}(f) \cdot M_{\underline{e}}^{\underline{v}}(\text{id}_V) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\underline{w}}^{\underline{w}}(f) = M_{\underline{w}}^{\underline{e}}(\text{id}_V) \cdot M_{\underline{e}}^{\underline{e}}(f) \cdot M_{\underline{e}}^{\underline{w}}(\text{id}_V) = \begin{pmatrix} -12 & -29 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(\text{id}_V) = M_{\underline{v}}^{\underline{e}}(\text{id}_V) \cdot M_{\underline{e}}^{\underline{w}}(\text{id}_V) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(d)

$$AC - CB = M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(f) \cdot M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(\text{id}_V) - M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(\text{id}_V) \cdot M_{\underline{w}}^{\underline{w}}(f) = M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f) - M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(f) = 0.$$