

A1]  $(A, \mathfrak{m})$  lok. Ring,  $M, N$  ee. Moduln

(a) Sei  $M \otimes_A A/\mathfrak{m} = 0$  zzz.  $M=0$ .

Bew. Es ist  $M \otimes_A A/\mathfrak{m} \cong M/\mathfrak{m}M$ . Es ist  $M/\mathfrak{m}M = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{m}M = M \stackrel{\text{Nakayama}}{\Leftrightarrow} M=0$

(b) Sei  $M \otimes_A N = 0$  zzz.  $M=0$  oder  $N=0$ .

Bew. Es ist  $0 = \underbrace{(M \otimes_A N)}_{=0} \otimes_A A/\mathfrak{m} \cong M \otimes_A (N \otimes_A A/\mathfrak{m})$   
 $\cong \underbrace{(M \otimes_A A/\mathfrak{m})}_{\cong (A/\mathfrak{m})^n} \otimes_{A/\mathfrak{m}} (N \otimes_A A/\mathfrak{m}) \cong (A/\mathfrak{m})^{nk}$  (\*)

Da  $M, N, A/\mathfrak{m}$  ee. sind  $M \otimes_A A/\mathfrak{m}$  und  $N \otimes_A A/\mathfrak{m}$  ee.  $A/\mathfrak{m}$ -Moduln. (\*)

Insb. e.d. VR, d.h. es ex.  $n, k \in \mathbb{N}_0$  sd.  $M \otimes_A A/\mathfrak{m} \cong (A/\mathfrak{m})^n$  und

$N \otimes_A A/\mathfrak{m} \cong (A/\mathfrak{m})^k$ . Also folgt

$$0 \stackrel{(*)}{=} (M \otimes_A A/\mathfrak{m}) \otimes_{A/\mathfrak{m}} (N \otimes_A A/\mathfrak{m}) \cong (A/\mathfrak{m})^n \otimes_{A/\mathfrak{m}} (A/\mathfrak{m})^k \\ \cong (A/\mathfrak{m})^{nk}$$

Daraus folgt  $nk=0$ , also  $n=0$  oder  $k=0$ . Also  $M \otimes_A A/\mathfrak{m} = 0$  oder

$N \otimes_A A/\mathfrak{m} = 0$ . Damit folgt die Beh. mit (a). □

Anm. (\*). Zunächst ist  $M \otimes_A A/\mathfrak{m}$  ee.  $A$ -Modul mit ES  $(m_i \otimes \bar{1})_{i=1}^n$  wobei

$(m_i)_{i=1}^n$  ES von  $M$ . Nun ist  $(m_i \otimes \bar{1})_{i=1}^n$  auch ES von  $M \otimes_A A/\mathfrak{m}$  als  $A/\mathfrak{m}$ -Modul, denn für  $x = \sum_{i=1}^n a_i (m_i \otimes \bar{1}) = \sum_{i=1}^n m_i \otimes \bar{a}_i \in M \otimes_A A/\mathfrak{m}$  ist:

$$x = \sum_{i=1}^n m_i \otimes \bar{a}_i = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i (m_i \otimes \bar{1}).$$

A21  $R$  Ring  $\text{Zz: } 0 \rightarrow N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N'' \quad (1) \text{ exakt}$

$\Leftrightarrow \forall R$ -Modul  $M$ :

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(M, N') \xrightarrow{v_*} \text{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{v_*} \text{Hom}_R(M, N'') \quad (2)$$

exakt

Bew. Sei (1) exakt und  $M$   $R$ -Modul. Sei  $f \in \text{Hom}_R(M, N')$  mit  $u_*(f) = 0$ . Dann ist  $u \circ f = 0$ .

Da  $\ker u = 0$  folgt  $\text{im } f = 0$  also  $f = 0$ , also  $v_*$  injektiv.

• Sei nun  $f \in \text{im } v_*$ . Dann  $\exists g \in \text{Hom}_R(M, N')$ :  $v_*(g) = u \circ g = f$ .

Dann gilt  $v_*(f) = v \circ f = v \circ u \circ g$ . Da  $\text{im } u = \ker v$  folgt  $v_*(f) = 0$  also  $f \in \ker(v_*)$ .

Also  $\text{im } v_* \subseteq \ker v_*$ .

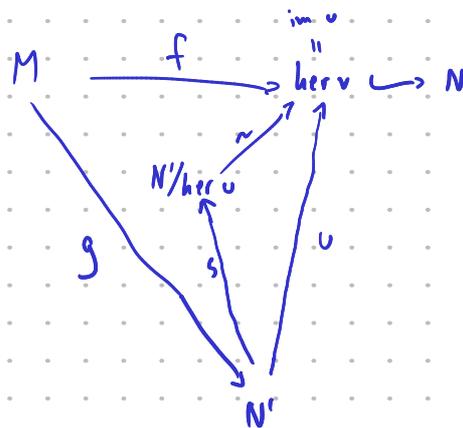
• Sei nun  $f \in \ker v_*$ . Dann ist  $v \circ f = 0$ , also  $\text{im } f \subseteq \ker v$ .

Da  $\ker v = \text{im } u$  ist  $N' \cong N'/\ker u \cong \text{im } u = \ker v$ , so

erhalten wir das nebenstehende kommut. Diagramm mit

$g: M \rightarrow N'$  und  $u \circ g = f$  also  $f \in \text{im } v_*$

Insgesamt folgt  $\text{im } v_* = \ker v_*$ .



Sei nun (2) exakt  $\forall R$ -Modul  $M$ .

•  $\text{Zz: } u$  injektiv. Setze  $M := \ker u$  und  $c: \ker u \rightarrow N'$  die kanon. Inklusion.

Dann ist  $v_*(c) = v \circ c = 0$ . Da  $v_*$  injektiv folgt  $c = 0$ , also  $\ker u = 0$ .

$\Rightarrow u$  injektiv.

• Setze  $M = N'$ . Dann ist  $\text{id}_{N'} \in \text{Hom}_R(N', N')$ . Da  $\text{im } v_* \subseteq \ker v_*$  gilt  $v_* \circ v_* = 0$ , also

$$0 = v_* (\text{id}_{N'}) = v_* \circ v_* (\text{id}_{N'}) = (v \circ u)_* (\text{id}_{N'})$$

also ist  $0 = v \circ u \circ \text{id} = v \circ u$  also  $\text{im } u \subseteq \ker v$ .

• Setze  $M := \ker v$  und  $c: \ker v \rightarrow N'$  die kanon. Inklusion. Dann ist

$v_*(c) = v \circ c = 0$ . Da  $\ker v = \text{im } u$  folgt  $\exists \varphi: \ker v \rightarrow N'$  mit  $u \circ \varphi = c$ .

Also  $\ker v = \text{im } c = \text{im } (u \circ \varphi) \subseteq \text{im } u$ .

□

A3 R Ring

(a) Beweis  $\ker \varphi' \xrightarrow{\alpha'} \ker \varphi \xrightarrow{\alpha} \ker \varphi''$  exakt.

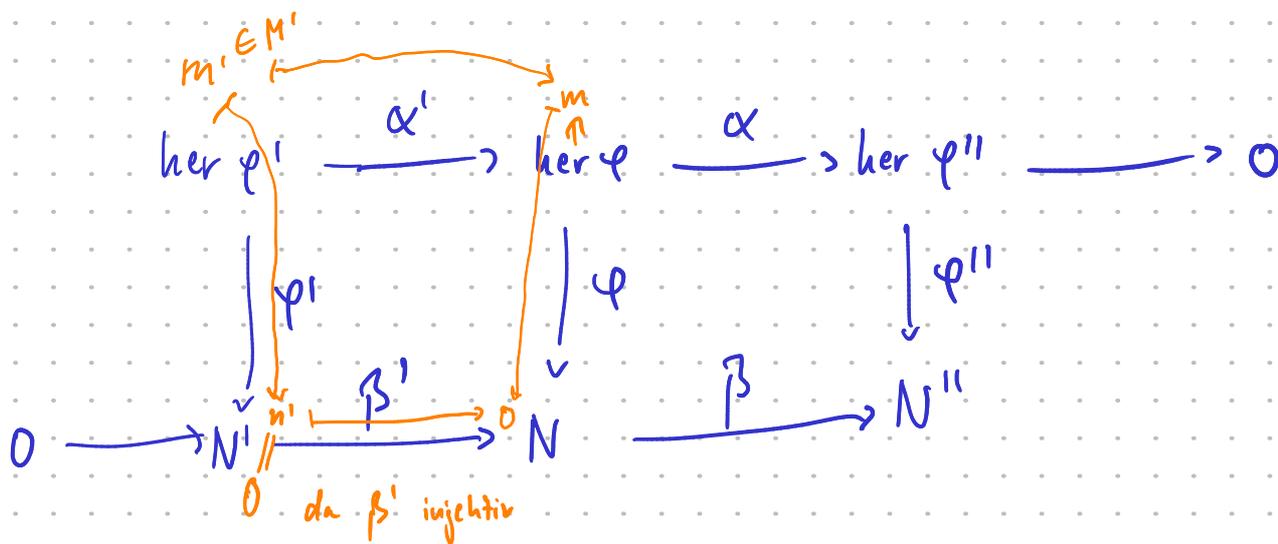
Beweis: Die Folge ist wohldef., da  $\beta' \circ \varphi' = \varphi \circ \alpha'$ , d.h.

für  $m' \in \ker \varphi'$  ist  $(\varphi \circ \alpha')(m') = (\beta' \circ \varphi')(m') = 0$ ,

also  $\alpha'(m') \in \ker \varphi$ . Analog für  $\ker \varphi \xrightarrow{\alpha} \ker \varphi''$ .

• Es gilt außerdem für  $m' \in \ker \varphi' \subseteq M'$ , dass  $(\alpha \circ \alpha')(m') = 0$  da  $\text{im } \alpha' = \ker \alpha$ ,  
also  $\text{im } \alpha' |_{\ker \varphi'} \subseteq \ker \alpha |_{\ker \varphi}$ .

• Diagramm-jagd:

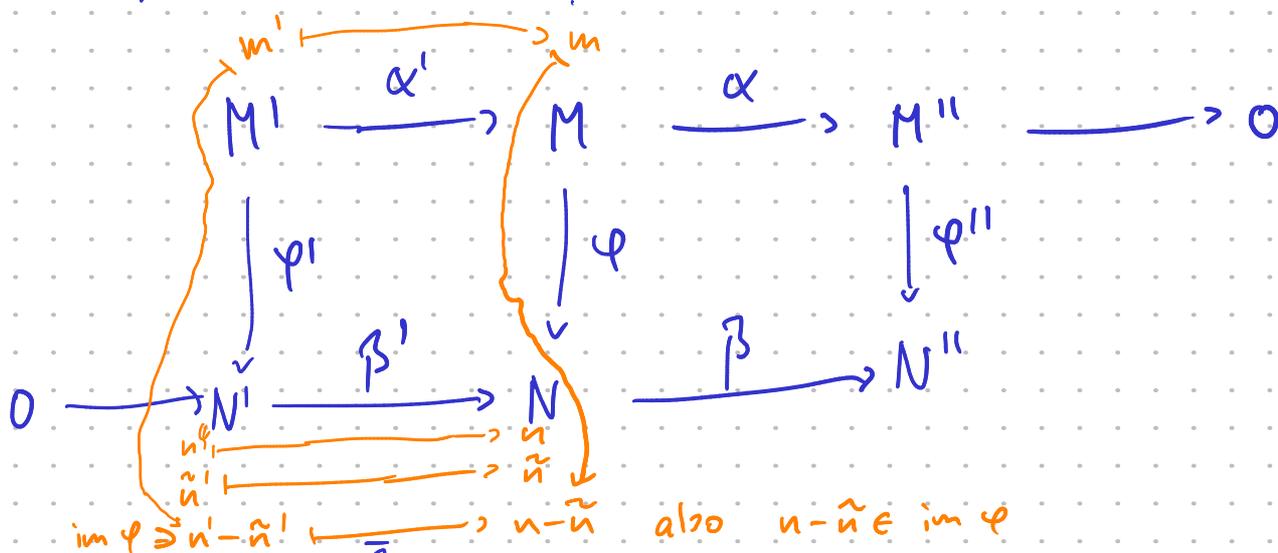


$\Rightarrow m' \in \ker \varphi'$

$\Rightarrow \ker \alpha |_{\ker \varphi} \subseteq \text{im } \alpha' |_{\ker \varphi'}$

b) Setze  $\bar{\beta}' : \text{coher } \varphi' \rightarrow \text{coher } \varphi, n' + \text{im } \varphi' \mapsto \beta'(n) + \text{im } \varphi$

$\bar{\beta}'$  wohldef., denn für  $n', \tilde{n}'$  mit  $n' - \tilde{n}' \in \text{im } \varphi'$  gilt  $\beta'(n') - \beta'(\tilde{n}') \in \text{im } \varphi$ , denn

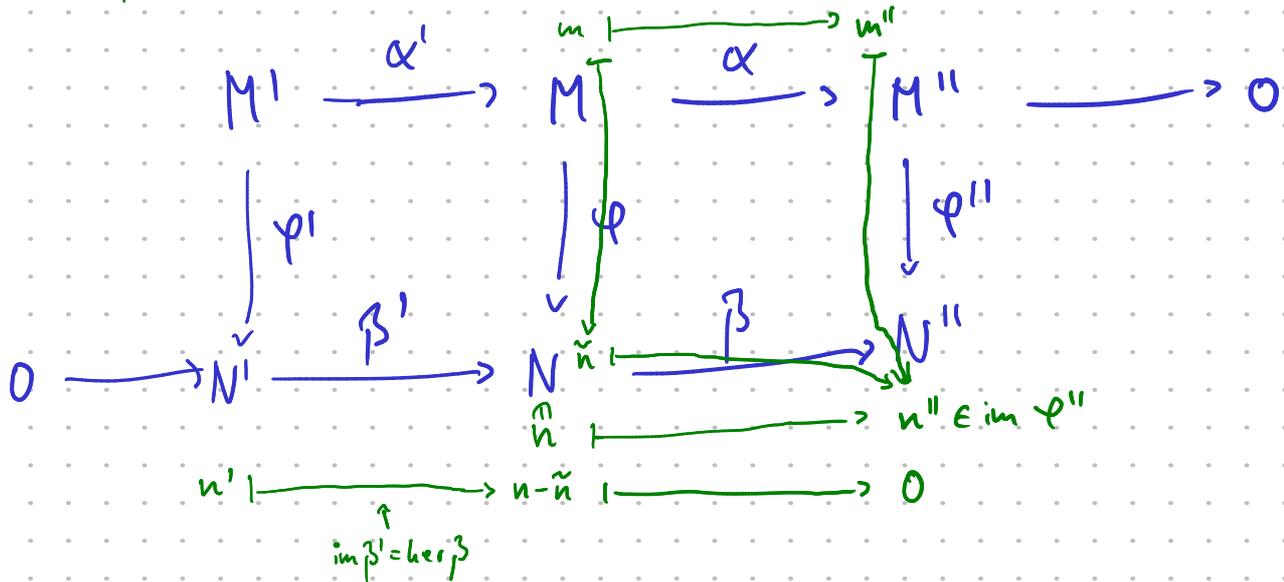


Analog für  $\text{coher } \varphi \xrightarrow{\bar{\beta}} \text{coher } \varphi''$ .

Nun zur exaktheit: Sei  $u + \text{im } \varphi \in \text{im } \bar{\beta}'$ . Dann ex. ein  $u' \in N'$ :

$\bar{\beta}'(u') = u$ . Insbes. ist  $\beta(\beta'(u')) = 0$  da  $\text{im } \beta' = \text{ker } \beta$ . Also insbes.  $\bar{\beta}(u + \text{im } \varphi) = 0$ , also  $u + \text{im } \varphi \in \text{ker } \bar{\beta}$ .

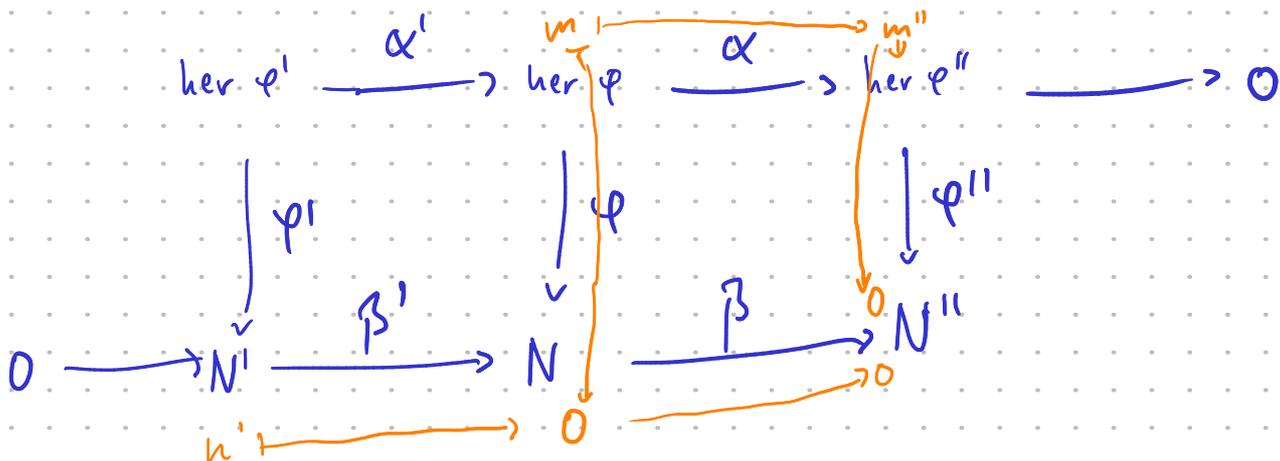
Zz.  $\text{ker } \bar{\beta} \subseteq \text{im } \bar{\beta}'$ . Sei  $u + \text{im } \varphi \in \text{ker } \bar{\beta}$ :  $\alpha$  surj.



Dann ist  $\beta'(u') = u - \tilde{u}$  und  $\tilde{u} \in \text{im } \varphi \Rightarrow \bar{\beta}'(u' + \text{im } \varphi) = u - \tilde{u} + \text{im } \varphi = u + \text{im } \varphi$ .  
 $\Rightarrow u + \text{im } \varphi \in \text{im } \bar{\beta}'$

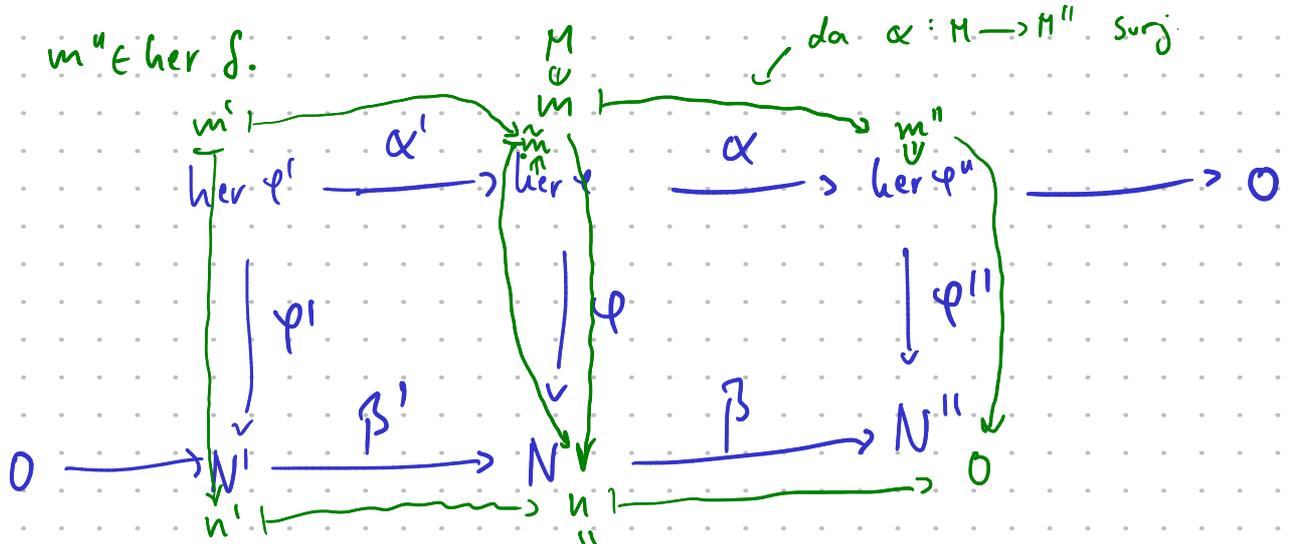
c) Zz.  $\text{ker } \varphi \xrightarrow{\alpha} \text{ker } \varphi'' \xrightarrow{\delta} \text{coker } \varphi'$  exakt.

Sei  $m'' \in \text{im } \alpha \mid_{\text{ker } \varphi}$ .



Da  $\beta'$  injektiv  $\Rightarrow u' = 0 \Rightarrow \delta(m'') = u' + \text{im } \varphi' = 0 \Rightarrow m'' \in \text{ker } \delta$ .

Sei  $m'' \in \ker \delta$ .



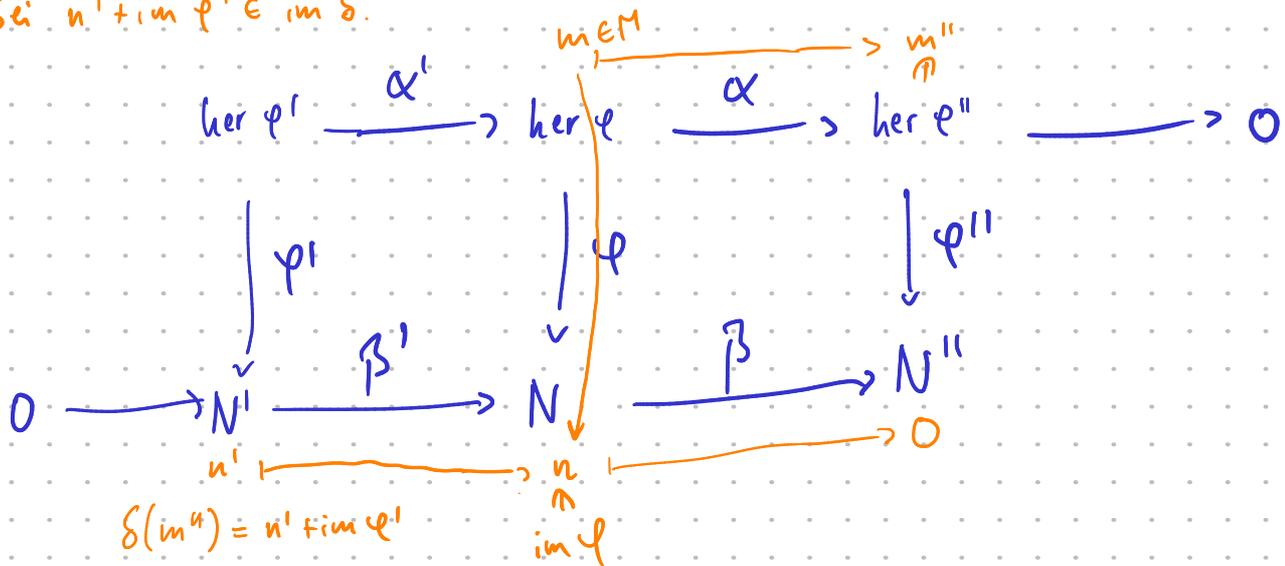
$$\delta(m'') = n' + \text{im } \varphi' = 0 \quad \text{also } m \in \ker \varphi \Rightarrow m'' \in \text{im } \alpha \Big|_{\ker \varphi'}$$

$$\Rightarrow n' \in \text{im } \varphi'$$

Insgesamt folgt die Exaktheit von  $\ker \varphi \xrightarrow{\alpha} \ker \varphi'' \xrightarrow{\delta} \text{coker } \varphi'$

• Zz.  $\ker \varphi'' \xrightarrow{\delta} \text{coker } \varphi' \xrightarrow{\bar{\beta}' } \text{coker } \varphi$  exakt.

Sei  $n' + \text{im } \varphi' \in \text{im } \delta$ .



$$\delta(\text{im } \varphi'') = n' + \text{im } \varphi'$$

$$\Rightarrow \beta'(n') = n \in \text{im } \varphi$$

$$\Rightarrow \bar{\beta}'(n' + \text{im } \varphi') = n + \text{im } \varphi = 0$$

$$\Rightarrow n' + \text{im } \varphi' \in \ker \bar{\beta}'$$



A4(a)  $A$  kommut. Ring. Zz:  $A[T]$  treufache  $A$ -Algebra.

Bew. Falls  $A=0$  dann ist jeder  $A$ -Modul  $M=0$  und damit

jede Folge von  $A$ -Modulen exakt. Sei nun  $A \neq 0$ .

Es ist  $A^{N_0} \cong A[T]$  als  $A$ -Moduln. Da  $A \neq 0$  freier  $A$ -Modul ist  $A^{(N_0)} \neq 0$  freier  $A$ -Modul und insb. treufach.

$A[T]$  wird via  $A \xrightarrow{\text{kan.}} A[T]$  zur  $A$ -Algebra.

□

(b) Bew  $\mathbb{Q}$  als  $\mathbb{Z}$ -Algebra flach, aber nicht treufach.

Bew. Sei  $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$  exakte Folge von  $\mathbb{Z}$ -Moduln.

Zz:  $M' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{f \otimes \text{id}_{\mathbb{Q}}} M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{g \otimes \text{id}_{\mathbb{Q}}} M'' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  exakt.

• Sei  $x = \sum_{\text{endl.}} m_i' \otimes q_i \in M' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ . Dann ist

$$(g \otimes \text{id}_{\mathbb{Q}})(f \otimes \text{id}_{\mathbb{Q}}(x)) = (g \otimes \text{id}_{\mathbb{Q}})\left(\sum_{\text{endl.}} f(m_i') \otimes q_i\right) = \sum_{\text{endl.}} \underbrace{g(f(m_i')) \otimes q_i}_{=0} = 0$$

• Sei nun  $x = \sum_{\text{endl.}} m_i \otimes q_i \in \ker(g \otimes \text{id}_{\mathbb{Q}})$  mit  $q_i = \frac{p_i}{s_i}$  mit  $(p_i, s_i) = 1$ ,  $p_i, s_i \in \mathbb{Z}$ ,  $s_i \neq 0$

$$\text{Dann ist } x = \sum_{\text{endl.}} m_i \otimes q_i = \sum_{\text{endl.}} m_i \otimes \frac{p_i}{s_i} = \sum_{\text{endl.}} m_i \otimes \left( \frac{p_i}{s_i} \cdot \frac{\prod_{i \neq j} s_j}{\prod_{i \neq j} s_j} \right)$$

$$\begin{aligned} & \in M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \\ &= \sum_{\text{endl.}} m_i \cdot \frac{p_i \prod_{i \neq j} s_j}{s_i \prod_{i \neq j} s_j} \otimes \frac{1}{\prod_{i \neq j} s_j} \\ &= \left( \sum_{\text{endl.}} \underbrace{m_i \cdot \frac{p_i \prod_{i \neq j} s_j}{s_i}}_{=: \tilde{m}_i} \right) \otimes \frac{1}{\prod_{i \neq j} s_j} \\ &= \tilde{m} \otimes \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Also folgt  $0 = (g \otimes \text{id}_{\mathbb{Q}})(x) = g(\tilde{m}) \otimes \frac{1}{s}$ . Nach LA II ist  $M'' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}(M'')$  via  $y \otimes \frac{a}{b} \mapsto \frac{ay}{b}$ . D.h.  $\frac{g(\tilde{m})}{s} = 0 \in \mathbb{Q}(M'')$ , also

$\exists r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ :  $rg(\tilde{m}) = 0 \in M''$ . Insbes.  $rg(\tilde{m}) = 0 \in \mathbb{Q}(M'')$ . Da

$\mathbb{Q}(M'') \cong M'' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  und  $M'' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$   $\mathbb{Q}$ -VR insbes. frei, insbes. torsionsfrei  
 $\rightarrow g(\tilde{m}) = 0 \in M'' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ .

$\Rightarrow \tilde{m} \in \ker g = \text{im } f$ , also ex. ein  $m' \in M'$  sd.  $f(m') = \tilde{m}$ .

Dann folgt  $(f \otimes \text{id}_{\mathbb{Q}})(m' \otimes \frac{1}{5}) = f(m') \otimes \frac{1}{5} = \tilde{m} \otimes \frac{1}{5} = x$ .

Also  $x \in \text{im}(f \otimes \text{id}_{\mathbb{Q}})$ .

Insgesamt folgt  $\mathbb{Q}$  flach als  $\mathbb{Z}$ -Modul.

Zz:  $\mathbb{Q}$  nicht treuflach. Es ist  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  l.p., d.h.  $2\mathbb{Z}$  max. Ideal in  $\mathbb{Z}$ . Nun ist

$\mathbb{Q}$   $\mathbb{Z}$ -Algebra via  $\iota: \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{hom.}} \mathbb{Q}$ , d.h.  $(2\mathbb{Z})^e = \mathbb{Q} \cap (2\mathbb{Z}) = (2\mathbb{Z}) = \mathbb{Q} = (1)$ .

Da  $\mathbb{Q}$  flache  $\mathbb{Z}$ -Alg. ist  $\mathbb{Q}$  nicht treuflach.  $\square$

AS (a)  $a \in A$  Ideal. Zz:  $I(V(a)) = r(a)$ .

Bew. Es gilt nach Def.

$$I(V(a)) = \bigcap_{p \in V(a)} p = \bigcap_{\substack{p \text{ Primideal} \\ a \in p}} p \stackrel{1.24}{=} r(a)$$

(b)  $Y \subseteq \text{Spec}(A)$ . Beh.  $V(I(Y)) = \bar{Y} \subseteq \text{Spec}(A)$ .

Bew.  $V(I(Y))$  ist nach Def. abgeschl. Es ist außerdem für  $p \in Y$ :  $p \in \text{Spec}(A)$

und  $p \supseteq \bigcap_{\tilde{p} \in Y} \tilde{p}$ , also  $p \in V(I(Y))$ , also  $Y \subseteq V(I(Y))$ .

Sei nun  $Z \subseteq \text{Spec}(A)$  mit  $Z$  abgeschl. und  $Y \subseteq Z$ , d.h.  $Z = V(M)$  wobei  $M \subseteq A$ .

und  $\forall p \in Y$ :  $p \supseteq M$ . Zz:  $V(I(Y)) \subseteq Z = V(M)$ . Dazu sei  $p \in V(I(Y))$ .

Also  $p \supseteq \bigcap_{\tilde{p} \in Y} \tilde{p} \supseteq M$ . Damit folgt  $p \in V(M) = Z$ .  $\square$

(c) Bew. • Wohldefiniert, da  $V(M) \subseteq \text{Spec}(A)$  abgeschl. für  $M \subseteq A$  und für  $Y \subseteq \text{Spec}(A)$

abgeschl. ist  $Y = V(M)$  für ein  $M \subseteq A$ . Sei  $a \in A$  das von  $M$  erz. Ideal in  $A$ , dann

ist nach Blatt 2  $Y = V(M) = V(a)$  also  $I(Y) = r(a)$  Radikalideal nach (a).

• Bijektivität: Sei  $a \in A$  mit  $a = r(a)$ . Dann ist  $I(V(a)) \stackrel{(a)}{=} r(a) = a$ . Sei nun  $Y \subseteq \text{Spec}(A)$  abgeschl. Dann ist  $V(I(Y)) \stackrel{(b)}{=} \bar{Y} \stackrel{Y \text{ abgeschl.}}{=} Y$ .

• Seien nun  $a, b \in A$  Radikalideale mit  $a \subseteq b$ . Dann ist  $V(b) \subseteq V(a)$ , denn für  $p \in V(b)$  ist  $p \supseteq b \supseteq a$  also  $p \in V(a)$ . Seien nun  $Y, Z \subseteq \text{Spec}(A)$  abgeschl.

mit  $Y \subseteq Z$ , dann ist  $I(Z) \subseteq I(Y)$ , denn für  $x \in I(Z) = \bigcap_{p \in Z} p$ , also

$x \in p \forall p \in Z$ . Da  $Y \subseteq Z$  also  $x \in \bigcap_{p \in Y} p = I(Y)$ .  $\square$