Aufgabe	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1. Für $x, y \in \mathbb{R}$ seien Abbildungen $d_i \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, 5$ definiert:

(a) $d_1(x,y) = (x-y)^2$ ist keine Metrik, denn

$$d(1,3) = 4 > 2 = 1 + 1 = d(1,2) + d(2,3).$$

(b) $d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ ist eine Metrik denn $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

(M1) $d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|} \geq 0$ und

$$d_2(x,y) = 0 \iff \sqrt{|x-y|} = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y.$$

(M2) $d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|} = \sqrt{|y-x|} = d_2(y,x)$

(M3) Es gilt

$$|x-z| = |x-y+y-z| \leq |x-y| + |y-z| \leq |x-y| + 2\sqrt{|x-y||y-z|} + |y-z|.$$

Damit folgt

$$|x-z| \leq |x-y| + 2\sqrt{|x-y||y-z|} + |y-z|$$
$$\overset{\sqrt{\cdot} \geq 0}{\iff} d_2(x,z) = \sqrt{|x-z|} \leq \sqrt{|x-y|} + \sqrt{|y-z|} = d_2(x,y) + d_2(y,z).$$

(c) $d_3(x,y) = |x^2 - y^2|$ ist keine Metrik, denn

$$d(-1,1) = |(-1)^2 - 1^2| = 0.$$

aber $-1 \neq 1$ in $\mathbb{R}$.

(d) $d_4(x,y) = |x - 2y|$ ist keine Metrik, denn

$$d_4(3,2) = |3 - 2 \cdot 2| = 1 \neq 4 = |2 - 2 \cdot 3| = d_4(2,3).$$

(e) $d_5(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ ist eine Metrik, denn $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

(M1) $d_5(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \geq 0$ und

$$d_5(x,y) = 0 \iff \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x = y.$$

(M2) $d_5(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = \frac{|y-x|}{1+|y-x|} = d_5(y,x)$.

(M3) Sei $d := \max\{|x-y|, |x-z|, |y-z|\}$. Falls $d = |x-z|$, dann ist

$$\frac{|x-z|}{1+|x-z|} = \frac{|x-z|}{1+d} \leq \frac{|x-y|}{1+d} + \frac{|y-z|}{1+d} \leq \frac{|x-y|}{1+\underbrace{|x-y|}_{\leq d}} + \frac{|y-z|}{1+\underbrace{|y-z|}_{\leq d}}.$$

Falls $d \neq |x-z|$. Dann sei O.E. $d = |x-y|$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & |x-z| \leq |x-y| \\ \iff \quad & |x-z| + |x-y| \cdot |x-z| \leq |x-y| + |x-y| \cdot |x-z| \\ \iff \quad & |x-z|(1+|x-y|) \leq |x-y|(1+|x-z|) \\ \iff \quad & \frac{|x-z|}{1+|x-z|} \leq \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \end{aligned}$$

Also insbesondere

$$\implies \quad \frac{|x-z|}{1+|x-z|} \leq \frac{|x-y|}{1+|x-y|} + \underbrace{\frac{|y-z|}{1+|y-z|}}_{\geq 0}.$$

Insgesamt folgt

$$d_5(x,z) \leq d_5(x,y) + d_5(y,z).$$

Aufgabe 2. Sei (X, d) ein metrischer Vektorraum über $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Die Metrik $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ erfülle die gegeben Eigenschaften.

Beh.: $\|x\|_d := d(x, 0)\ \forall x \in X$ ist eine Norm auf X.

Beweis. Seien $x, y \in X$ und $\alpha \in K$.

(N1) $\|x\|_d = d(x,0) \overset{d \text{ Metrik}}{\geq} 0$
$x = 0 \overset{d \text{ Metrik}}{\iff} d(x,0) = 0 \iff \|x\|_d = 0$

(N2) $\|\alpha x\|_d = d(\alpha x, 0) \overset{\text{E2}}{=} |\alpha| d(x,0) = |\alpha| \|x\|_d$

(N3) Dreicksungleichung:

$$\begin{aligned}
\|x+y\| &= d(x+y, 0) \\
&= d(y-(-x), 0) \\
&\overset{\text{E1}}{=} d(-x, y) \\
&\overset{d \text{ Metrik}}{\leq} d(-x,0) + d(0,y) \\
&\overset{\text{E2}}{=} d(x,0) + d(y,0) \\
&= \|x\|_d + \|y\|_d.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3. Seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

(a) Beh.: Für $a, b \geq 0$ gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Beweis. Definiere

$$f(t) := (a^p)^t \cdot (b^q)^{1-t} = e^{(p \ln a - q \ln b)t}$$

Es folgt

$$f''(t) = \underbrace{(p \ln a - q \ln b)^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{f(t)}_{\geq 0}.$$

Also ist $f(t)$ konvex. Es ist mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \implies \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$. Mit $\lambda = \frac{1}{p}, x = 1$ und $y = 0$ folgt damit

$$ab = a^{\frac{1}{p} \cdot p} b^{q \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right)} = f\left(\frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p} f(1) + \left(1 - \frac{1}{p}\right) f(0) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

□

(b) Beh.: Für $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Beweis. Es sei $\|a\|_p := (\sum_{i=1}^n |a_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ und $\|b\|_q := (\sum_{i=1}^n |b_i|^q)^{\frac{1}{q}}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|a\|_p \cdot \|b\|_q} \sum_{i=1}^n |a_i b_i| &= \sum_{i=1}^n \left|\frac{a_i}{\|a\|_p}\right| \left|\frac{b_i}{\|b\|_q}\right| \\
&\overset{\text{Young}}{\leq} \sum_{i=1}^n \frac{|a_i|^p}{p\|a\|_p^p} + \sum_{i=1}^n \frac{|b_i|^q}{q\|b\|_q^q} \\
&= \frac{1}{p} \frac{1}{\sum_{i=1}^n |a_i|^p} \sum_{i=1}^n |a_i|^p + \frac{1}{q} \frac{1}{\sum_{i=1}^n |b_i|^q} \sum_{i=1}^n |b_i|^q \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\implies \sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \|a\|_p \cdot \|b\|_q.$$

□

Aufgabe 4. Sei

$$B_1 := \{f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$$

die abgeschlossene Einheitskugel.

(a) Beh.: Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n(x) := \begin{cases} -2^{2n+4}\left(x - \frac{3}{2^{n+2}}\right)^2 + 1 & x \in \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

erfüllt die Eigenschaften.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Zunächst ist f_n stetig, denn: $\forall x \in \left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right)$ ist f_n als Polynom stetig. Für $x \in [0,1] \setminus \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2n}\right]$ ist f_n als konstante Funktion stetig. Außerdem gilt

$$\lim_{x \nearrow \frac{1}{2^{n+1}}} f_n(x) = 0 = -\frac{2^{2n+4}}{2^{2n+4}} + 1 = -2^{2n+4}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{3}{2^{n+2}}\right)^2 + 1 = f_n\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = \lim_{x \searrow \frac{1}{2^{n+1}}} f_n(x).$$

Analog für $x = \frac{1}{2^n}$.

Weiter ist $\|f_n\|_\infty = 1$, denn für $x \in [0,1] \setminus \left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right)$ ist $f_n(x) = 0$ und für $x \in \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]$ ist der Scheitelpunkt der Parabel mit $x_{max} = \frac{3}{2^{n+2}}$ als Maximum mit $f(x_{max}) = 1$ gegeben.

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$ und $x \in [0,1]$. O.E. sei $m > n$. Falls $x \in \left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right)$, dann ist $f_m(x) = 0$, denn $m > n \implies m \geq n+1 \implies \frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.
Falls $x \in \left(\frac{1}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^m}\right)$, ist analog $f_n(x) = 0$.
Sonst gilt $f_n(x) = f_m(x) = 0$.

Damit folgt $f_n(x) f_m(x) = 0$. □

(b) Beh.: Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den in (a) gegebenen Eigenschaften, hat keine konvergente Teilfolge.

Beweis. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_1$ mit $\|f_n\|_\infty = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ und $f_n(x)f_m(x) = 0 \ \forall x \in [0,1], n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$.

Sei weiter $f \in \mathcal{C}([0,1])$ beliebige Funktion und $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Teilfolge.

Ang.: $\|f_{n_k} - f\|_\infty \xrightarrow{k\to\infty} 0$

Ang.: $\|f\|_\infty \neq 1$. Dann sei $\epsilon = \frac{|1-\|f\|_\infty|}{2}$. Dann gilt $\forall k \in \mathbb{N} \ \|f_{n_k}\|_\infty = 1$, also folgt

$$\|f_{n_k} - f\| \geq |1 - \|f\|_\infty| > \epsilon \ ↯.$$

Damit ist $\|f\|_\infty = 1$. Sei nun $x_{max} \in [0,1]$ beliebig mit $f(x_{max}) = 1$.

Falls $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt $f_{n_k}(x_{max}) = 0 \implies \|f_{n_k} - f\| \geq 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$.
Falls $\exists k \in \mathbb{N}$ mit $f_{n_k}(x_{max}) = 1$: Dann gilt $\forall m > k$:

$$f_{n_k}(x_{max}) \cdot f_{n_m}(x_{max}) = 0 \overset{\mathbb{R}\text{ nullteilerfrei}}{\implies} f_{n_m}(x_{max}) = 0 \implies \|f - f_{n_m}\|_\infty \geq 1 \quad .$$

Also konvergiert f_{n_k} nicht gegen f. □