Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	$\sum$
Punkte						

Aufgabe 1. Für $n \in N_0$ bezeichne P_n das Legendre Polynom.

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n.$$

$\forall n, m \in \mathbb{N}_0$, $n \geq m$, $0 \leq k \leq n$ gilt zudem nach Aufgabenstellung:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m \,\mathrm{d}x = (-1)^{m+1} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}(x^2-1)^n \frac{\mathrm{d}^{m+k}}{\mathrm{d}x^{m+k}}(x^2-1)^m \,\mathrm{d}x \quad (*).$$

(a) Beh.:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}_0, n \neq m.$$

Beweis. Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n \neq m$ beliebig. O.B.d.A.: $n > m$. Dann gilt

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^n 2^m n! m!} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m \,\mathrm{d}x.$$

Zu zeigen:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m \,\mathrm{d}x = 0.$$

Mit $(*)$ und $k = m+1 \leq n$ folgt

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m \,\mathrm{d}x = (-1)^{m+1} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-m-1}}{\mathrm{d}x^{n-m-1}}(x^2-1)^n \frac{\mathrm{d}^{2m+1}}{\mathrm{d}x^{2m+1}}(x^2-1)^m \,\mathrm{d}x.$$

Wegen $\deg\,(x^2-1)^m = 2m$ folgt $\frac{\mathrm{d}^{2m+1}}{\mathrm{d}x^{2m+1}}(x^2-1)^m = 0$. Damit folgt

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m \,\mathrm{d}x = 0.$$

$\square$

(b) Beh.: Für ein festes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\forall k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$:

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^n(1+x)^n \,\mathrm{d}x = \frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!} \int_{-1}^{1} (1-x)^{n-k}(1+x)^{n+k} \,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Beweis per Induktion nach k. $k = 0$: trivial.

Es existiere ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < n$ mit Beh. Dann folgt für $k+1$ mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}
&\frac{(n!)^2}{(n-k-1)!(n+k+1)!} \int_{-1}^{1} (1-x)^{n-k-1}(1+x)^{n+k+1} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{(n!)^2}{(n-k-1)!(n+k+1)!} \Bigg(\underbrace{-\frac{1}{n-k}(1-x)^{n-k}(1+x)^{n+k+1}\Big|_{-1}^{1}}_{=0} \\
&\quad + \int_{-1}^{1} \frac{n+k+1}{n-k}(1-x)^{n-k}(1+x)^{n+k} \,\mathrm{d}x \Bigg) \\
&= \frac{(n!)^2(n-k)}{(n-k)!(n+k)!(n+k+1)} \int_{-1}^{1} \frac{n+k+1}{n-k}(1-x)^{n-k}(1+x)^{n+k} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!} \int_{-1}^{1} (1-x)^{n-k}(1+x)^{n+k} \,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \int_{-1}^{1} (1-x)^n(1+x)^n \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

$\square$

(c) Beh.: Es gilt $\forall n \in \mathbb{N}_0$:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}.$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Dann sind wegen $\deg\,(x^2-1)^n = 2n$ in der $2n$-ten Ableitung alle Terme bis auf den x^{2n} Term null. Damit folgt

$$\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}(x^2-1)^n = \frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}x^{2n} = (2n)! \qquad (**).$$

Dann folgt mit $(*)$ und $k = n$:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P_n(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(*)}{=} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\cdot\underbrace{\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}(x^2-1)^n}_{=(2n)!\quad(**)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{(2n)!(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}((x-1)(x+1))^n\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{(2n)!(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}((-1)(1-x)(1+x))^n\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-x)^n(1+x)^n\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{(b)},\,k=n}{=} \frac{1}{2^{2n}}\int_{-1}^{1}(1+x)^{2n}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{2n+1}(1+x)^{2n+1}\Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{2^{2n+1}}{2^{2n}}\frac{1}{2n+1} \\
&= \frac{2}{2n+1}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2. Die Funktion $f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch:

$$f(x) = \min\left(x - \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} - x\right).$$

Beh.: Für die Fourier Entwicklung F_∞^f gilt:

$$F_\infty^f = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cos((2k-1)x).$$

Beweis. Es gilt zunächst:

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{\pi}{2} & 0 \le x \le \pi \\ \frac{3\pi}{2} - x & \pi < x \le 2\pi \end{cases}.$$

Für die Koeffizienten a_k mit $k > 0$ folgt nach Definition:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi}\left(\frac{3\pi}{2}-x)\cos(kx)\right)\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}\sin(kx)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{k}\sin(kx)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{k}\sin(kx)\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\Big|_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{k}\sin(kx)\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{2}{\pi k^2}(\cos(k\pi)-1).
\end{aligned}$$

Für a_0 gilt

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\,\mathrm{d}x + \int_\pi^{2\pi}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\,\mathrm{d}x\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Für b_k folgt nach Definition mit analoger Rechnung:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Damit folgt die Fourrier-Entwicklung von f mit:

$$\begin{aligned} F_\infty^f(x) &= \sum_{k=1}^\infty \frac{2}{\pi k^2}(\underbrace{\cos(k\pi)}_{=(-1)^k}-1)\cos(kx) \\ &= \sum_{k=1}^\infty \frac{2}{\pi(2k-1)^2}\left[\underbrace{((-1)^{2k-1}-1)}_{=-2}\cos((2k-1)x) + \underbrace{((-1)^{2k}-1)}_{=0}\cos(2kx)\right] \\ &= -\sum_{k=1}^\infty \frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cos((2k-1)x). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3. Beh.:

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Beweis. Nach Vorlesung gilt $a_k = c_k + c_{-k}$ und $b_k = i(c_k - c_{-k})$. Mit $b_k = 0$ folgt $c_k = c_{-k}$ und mit Aufg. 2.2 damit:

$$c_k = c_{-k} = \frac{a_k}{2} = \frac{1}{\pi k^2}((-1)^k - 1).$$

Damit folgt

$$2\pi\sum_{-\infty}^\infty |c_k|^2 = 2\pi\sum_{-\infty}^\infty \left|\frac{2}{\pi(2k-1)^2}\right|^2 \overset{c_k=c_{-k}}{=} \frac{16}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k-1)^4}.$$

Außerdem gilt

$$\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\,\mathrm{d}x + \int_\pi^{2\pi}\left(\frac{3\pi}{2}-x)^2\right)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{6}.$$

Zusammen mit der Parsevalschen Gleichung (PG) folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{\pi^3}{6} &\overset{\text{(PG)}}{=} \frac{16}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k-1)^4} \\ \implies \frac{\pi^4}{96} &= \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k-1)^4}. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 4. Beh.: Für 2π-periodische Funktionen $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \quad \text{(A)} \\ \int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \quad \text{(B)}. \end{aligned}$$

Beweis. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch, außerdem ist $\sin(x)$ 2π periodisch $(*)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{0} f(x+2\pi)\sin(k(x+2\pi))\,\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} \int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Für $\cos(kx)$ analog. □

Beh.: Für 2π-periodische gerade f_g bzw. ungerade f_u Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt für ihre Fourier-Entwicklung:

$$F_\infty^{f_g}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) \quad \text{bzw.} \quad F_\infty^{f_u}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx).$$

Beweis. Sei $f_g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gerade $(*)$ und 2π-periodisch. Dann bleibt zu zeigen: $b_k = 0$. Es gilt $\sin(-x) = -\sin(x)$, also ist $\sin(x)$ ungerade $(**)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{(A)}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{x\to -x}{=} \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} -f(-x)\sin(-kx)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(-x)\sin(-kx)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{(*),(**)}{=} -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sei $f_u \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungerade und 2π-periodisch. Dann bleibt zu zeigen $a_k = 0$. Es gilt $\cos(-x) = \cos(x)$, also ist $\cos(x)$ gerade. Dann folgt die Behauptung analog. □

Aufgabe 5. Beh.: $\forall n, m \in \mathbb{N}_0$, $n \geq m$, $0 \leq k \leq n$ gilt zudem nach Aufgabenstellung:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m\,\mathrm{d}x = (-1)^{m+1}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}(x^2-1)^n \frac{\mathrm{d}^{m+k}}{\mathrm{d}x^{m+k}}(x^2-1)^m\,\mathrm{d}x.$$

Es gelte

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^2-1)^n = (x^2-1)^{n-k}\cdot p_k(x) \quad (*).$$

Beweis. Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Beweis per Induktion nach k.

Für $k = 0$ ist Beh. trivialerweise erfüllt.

Sei nun $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < n$ beliebig mit gegebener Beh. Dann gilt für $k+1$:

$$\begin{aligned} &(-1)^{k+1}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-k-1}}{\mathrm{d}x^{n-k-1}}(x^2-1)^n \frac{\mathrm{d}^{m+k+1}}{\mathrm{d}x^{m+k+1}}(x^2-1)^m\,\mathrm{d}x \\ &= (-1)^{k+1}\left[\left(\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}(x^2-1)^n \cdot \frac{\mathrm{d}^{m+k+1}}{\mathrm{d}x^{m+k+1}}(x^2-1)^m\right)\Bigg|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}(x^2-1)^n \cdot \frac{\mathrm{d}^{m+k}}{\mathrm{d}x^{m+k}}(x^2-1)^m\,\mathrm{d}x\right] \\ &\overset{\text{I.V.}}{=} (-1)^{k+1}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}(x^2-1)^n \cdot \frac{\mathrm{d}^{m+k+1}}{\mathrm{d}x^{m+k+1}}(x^2-1)^m\right)\Bigg|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \cdot \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Bleibt zu zeigen:

$$\left[\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}(x^2-1)^n \cdot \frac{\mathrm{d}^{m+k+1}}{\mathrm{d}x^{m+k+1}}(x^2-1)^m\right]\Bigg|_{-1}^{1} = 0.$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}(x^2-1)^n \cdot \frac{\mathrm{d}^{m+k+1}}{\mathrm{d}x^{m+k+1}}(x^2-1)^m\right]\Bigg|_{-1}^{1} &\overset{(*)}{=} \left[(x^2-1)^k \cdot p_{n-k}(x) \cdot \frac{\mathrm{d}^{m+k+1}}{\mathrm{d}x^{m+k+1}}(x^2-1)^m\right]\Bigg|_{-1}^{1} \\
&= (1-1)^k \cdot p_{n-k}(1) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^{m+k+1}}{\mathrm{d}x^{m+k+1}}(x^2-1)^m\right)(1) \\
&\quad - (1-1)^k \cdot p_{n-k}(-1) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^{m+k+1}}{\mathrm{d}x^{m+k+1}}(x^2-1)^m\right)(-1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Damit folgt die Induktionsbehauptung für $k+1$. $\square$