Aufgabe	A32	A33	A34	A35	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 32. (a) Beh.: $\sqrt{2}$ ist EW von A und $\sqrt{3}$ ist EW von B.

Beweis. Es ist $\chi_A^{\text{char}} = t^2 - 2$. Damit folgt $\chi_A^{\text{char}}(\sqrt{2}) = 0$.
Weiter ist $\chi_B^{\text{char}} = t^2 - 3$. Damit folgt $\chi_B^{\text{char}}(\sqrt{3}) = 0$. □

(b) Beh.:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Es ist mit Kroneckerprodukt

$$A \otimes E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2 \otimes B = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Mit $C = A \otimes E_2 + E_2 \otimes B$ folgt die Behauptung. □

(c) Beh.: $\chi_C^{\text{char}} = t^4 - 10t^2 + 1$ und $\chi_C^{\text{char}}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0$.

Beweis.

$$\chi_C^{\text{char}} = \det(tE_4 - C) = \begin{vmatrix} t & -3 & -2 & 0 \\ -1 & t & 0 & -2 \\ -1 & 0 & t & -3 \\ 0 & -1 & -1 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 + t^2 & -2 & -2t \\ -1 & t & 0 & -2 \\ 0 & -t & t & -1 \\ 0 & -1 & -1 & t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 + 3t^2 & -2 - 2t^2 & -2t \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 - t^2 & -1 + t^2 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 + 3t^2 & -2 - 2t^2 \\ -1 - t^2 & -1 + t^2 \end{vmatrix} = 1 - 10t^2 + t^4.$$

Betrachte $F(A) \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ und $F(B) \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$. Dann ist $\sqrt{2}$ EW von $F(A)$ und $\sqrt{3}$ EW von $F(B)$. Damit folgt mit 31(c): $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ EW von $F(A) \otimes \text{id} + \text{id} \otimes F(B) \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2 \otimes_R \mathbb{R}^2)$. Es gilt $F(A) \otimes \text{id} + \text{id} \otimes F(B) = F(C)$. Damit folgt $\chi_C^{\text{char}}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \chi_{F(C)}^{\text{char}}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0$. □

Aufgabe 33. (a) Seien $f_1, \ldots, f_n \in V^*$. Beh.: Es ex. eine eindeutige lineare Abb. $\varphi_{f_1,\ldots,f_n} : V^{\otimes n} \to K$ mit

$$\varphi_{f_1,\ldots,f_n}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = f(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n) \qquad \forall x_1, \ldots, x_n \in V.$$

Beweis. Definiere $\mu \colon V^n \to K$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n)$. μ ist n-fach multilinear, da $f_1, \ldots, f_n$ linear und μ Produkt von linearen Abbildungen. Die Behauptung folgt mit (UM) angewendet auf μ. □

(b) Beh.: Es gibt eine eindeutige lineare Abbildung $\Phi_n \colon (V^*)^{\otimes n} \to (V^{\otimes n})^*$ mit

$$\Phi_n(f_1 \otimes \ldots \otimes f_n) = \varphi_{f_1,\ldots,f_n} \qquad \forall f_1, \ldots, f_n \in V^*.$$

Beweis. Definiere $\mu\colon (V^*)^n \to (V^{\otimes n})^*$, $(f_1, \ldots, f_n) \mapsto \varphi_{f_1,\ldots,f_n}$. μ multilinear, denn $\forall x_1, \ldots, x_n \in V$ gilt

$$\begin{aligned}
\mu(f_1 + \lambda g_1, f_2, \ldots, f_n)(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) &= \varphi_{(f_1+\lambda g_1),f_2,\ldots,f_n}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) \\
&= (f_1 + \lambda g_1)(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n) \\
&= f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n) + \lambda g_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n) \\
&= \varphi_{f_1,\ldots,f_n}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) + \lambda \varphi_{g_1,f_2,\ldots,f_n}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) \\
&= \mu(f_1, \ldots, f_n) + \lambda \mu(g_1, f_2, \ldots, f_n).
\end{aligned}$$

Damit stimmt $\mu(f_1 + \lambda g_2, f_2, \ldots, f_n)$ mit $\mu(f_1, \ldots, f_n) + \lambda \mu(g_1, f_2, \ldots, f_n)$ auf den Erzeugern von $V^{\otimes n}$ überein, d.h. auf ganz $V^{\otimes n}$, also folgt

$$\mu(f_1 + \lambda g_2, f_2, \ldots, f_n) = \mu(f_1, \ldots, f_n) + \lambda \mu(g_1, f_2, \ldots, f_n).$$

Analog für die anderen Argumente.

Die Behauptung folgt jetzt wieder mit (UM) angewendet auf μ. □

(c) Beh.: Für $n = 2$ und V e.d. ist Φ_2 ein Iso.

Beweis. Da V e.d. folgt $\dim V = \dim V^*$. Sei $k = \dim V = \dim V^*$. Dann gilt nach VL:

$$V \otimes_K V \cong K^k \otimes_K K^k \cong V^* \otimes_K V^*.$$

Damit g.z.z., dass Φ_2 injektiv ist. Sei $(v_i)_{i\in I}$ Basis von V und $(v_i^*)_{i\in I}$ die dazu duale Basis von V^*. Dann ist nach VL $(v_i^* \otimes v_j^*)_{(i,j)\in I^2}$ Basis von $V^* \otimes_K V^*$. Sei nun $f \in V^* \otimes V^*$ mit $\Phi_2(f) = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\Phi_2(f) &= \Phi_2\left[\sum_{(i,j)\in I^2} \alpha_{ij}(v_i^* \otimes v_j^*)\right] \\
&= \sum_{(i,j)\in I^2} \alpha_{ij}\Phi_2(v_i^* \otimes v_j^*) \\
&= \sum_{(i,j)\in I^2} \alpha_{ij}\varphi_{v_i^*,v_j^*}
\end{aligned}$$

Damit folgt $\forall x, y \in V$

$$0 = \sum_{(i,j)\in I^2} \alpha_{ij} v_i^*(x) \cdot v_j^*(y).$$

Sei nun $(k, l) \in I^2$ beliebig. Dann setze $x := v_k$, $y := v_l$. Damit folgt

$$\sum_{(i,j)\in I^2} \alpha_{ij} v_i^*(v_k) v_j^*(v_l) = \sum_{(i,j)\in I^2} \alpha_{ij}\delta_{ik}\delta_{jl} = \alpha_{kl} = 0.$$

Also $\alpha_{kl} = 0\ \forall (k, l) \in I^2$. Damit ist $f = 0$ und Φ_2 injektiv. □

Aufgabe 34. (a) Seien $m \in \mathbb{N}$ und $(x_1, \ldots, x_m)$ ES. von M. Beh.: Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$ ist die Familie

$$(x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_n})_{1\leq i_1<\ldots<i_n\leq m}$$

ein ES. von $\bigwedge^n M$.

Beweis. Da $\bigwedge^n M$ von Elementen der Form $y_1 \wedge \ldots \wedge y_n$ erzeugt wird für $y_1, \ldots, y_n \in M$, g.z.z., dass diese Elemente von der angegebenen Familie erzeugt werden. Dazu seien $y_1, \ldots, y_n \in M$ beliebig. Da $(x_1, \ldots, x_n)$ ES von M, ex. $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ s.d. $\forall i = 1, \ldots, n$

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} x_j.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} y_1 \wedge \ldots \wedge y_n &= \sum_{j=1}^m \alpha_{1j} x_j \wedge \ldots \wedge \sum_{j=1}^m \alpha_{nj} x_j \\ &= \alpha_{11} x_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{12} x_2 \wedge \alpha_{21} x_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{n1} x_1 + \ldots + \alpha_{1m} x_m \wedge \ldots \wedge \alpha_{nm} x_m. \end{aligned}$$

Streichen der Nullterme (Summanden mit gleichen Faktoren im Sinne von $\wedge$) und Sortierung der x_j innerhalb der Summanden durch mehrfache Anwendung der Antisymmetrie zeigt die Behauptung. □

(b) Sei nun $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ und $I = (2, 1+\sqrt{-5}) \subseteq R$. Beh.: $\bigwedge^2 I = 0$.

Beweis. Da $\{2, 1+\sqrt{-5}\}$ ES von I als R-Modul ist, folgt mit (a), dass $2 \wedge (1+\sqrt{-5})$ bereits I erzeugt. Es genügt also z.z., dass $2 \wedge (1+\sqrt{-5}) = 0$ in $\bigwedge^2 I$. Es gilt

$$\begin{aligned} 3 \cdot (2 \wedge (1+\sqrt{-5})) &= 6 \wedge (1+\sqrt{-5}) = (1-\sqrt{-5}) \left[(1+\sqrt{-5}) \wedge (1+\sqrt{-5})\right] = 0 \\ 2 \cdot (2 \wedge (1+\sqrt{-5})) &= (1+\sqrt{-5}) \cdot (2 \wedge 2) = 0 \end{aligned}$$

Damit folgt

$$2 \wedge (1+\sqrt{-5}) = 3 \cdot (2 \wedge 1 + \sqrt{-5}) - 2 \cdot (2 \wedge 1 + \sqrt{-5}) = 0.$$

□

Aufgabe 35. (a) Beh.: Es gibt einen eindeutigen R-Mod.hom. $f\colon \bigwedge^2 M \to M \otimes_R M$ mit

$$f(a \wedge b) = a \otimes b - b \otimes a.$$

Beweis. Definiere $\varphi\colon M^2 \to M \otimes_R M$, $(a,b) \mapsto a \otimes b - b \otimes a$. φ ist alternierend, denn:

- φ bilinear:

$$\begin{aligned} \varphi(a+\lambda b, c) &= (a+\lambda b) \otimes c - c \otimes (a + \lambda b) \\ &= a \otimes c + \lambda(b \otimes c) - c \otimes a - \lambda(c \otimes b) \\ &= a \otimes c - c \otimes a + \lambda(b \otimes c - c \otimes b) \\ &= \varphi(a,c) + \lambda(b,c). \end{aligned}$$

  Analog für zweites Argument.
- $\varphi(a,a) = a \otimes a - a \otimes a = 0 \ \forall a \in M$.

Damit folgt die Behauptung mit (UA) angewendet auf φ. □

(b) Beh.: Sei M endlich erzeugt und frei. Dann ist die Abbildung f aus (a) injektiv.

Beweis. Sei $(x_1, \ldots, x_m)$ Basis von M. Definiere $I \coloneqq \{1, \ldots, m\}$. Dann ist nach VL $(x_i \otimes x_j)_{(i,j)\in I^2}$ Basis von $M \otimes_R M$. Sei $x \in \bigwedge^2 M$ mit $f(x) = 0$. Dann ex. mit 34(a) ein $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^m \in R^{(I)}$ mit $\alpha_{ij} = 0$ für $i \geq j$ und

$$x = \sum_{(i,j)\in I^2, j>i} \alpha_{ij}(x_i \wedge x_j).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} 0 &= f(x) \\ &= f\left(\sum_{(i,j)\in I^2, j>i} \alpha_{ij}(x_i \wedge x_j)\right) \\ &= \sum_{(i,j)\in I^2, j>i} \alpha_{ij} f(x_i \wedge x_j) \\ &= \sum_{(i,j)\in I^2, j>i} \alpha_{ij}(x_i \otimes x_j - x_j \otimes x_i) \\ &\overset{x_i \otimes x_i - x_i \otimes x_i = 0}{=} \sum_{(i,j)\in I^2, j\geq i} \alpha_{ij}(x_i \otimes x_j - x_j \otimes x_i) \end{aligned}$$

Setze $\alpha_{ji} := -\alpha_{ij}$ für $j > i$. Damit folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i,j \in I^2, j \geq i} \alpha_{ij}(x_i \otimes x_j) + \alpha_{ji}(x_j \otimes x_i) \\ &= \sum_{(i,j) \in I^2} \alpha_{ij}(x_i \otimes x_j). \end{aligned}$$

Da $(x_i \otimes x_j)_{(i,j) \in I}$ Basis von $M \otimes_R M$, insbes. l.u., d.h. $\alpha_{ij} = 0$ $\forall (i,j) \in I^2$. Also $x = 0$ und f injektiv. $\square$