Bemerkung 1. Rechenregeln für komplexe Zahlen

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{i}{2}(z - \overline{z})$
3. $|z| \geq 0$ und $|z| = 0 \iff z = 0$
4. $|\overline{z}| = |z|$
5. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
6. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

Reelle Zahlen: $z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0 \iff z = \overline{z}$

Dies führt zur weiteren Darstellung komplexer Zahlen mit Hilfe von sin und cos.

Polardarstellung

(a)
$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) \qquad r = |z|.$$

Bsp.: $i = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right)$

(b) Definiere $e^{iy} := \cos y + i \sin y \qquad y \in \mathbb{R}$. Es folgt eine *Exponentialdarstellung*.
$$z = r \cdot e^{i\varphi} \text{ mit } r = |z| \quad \varphi = \mathrm{Arg}(z).$$

Satz 1 (Vorteil der Exponentialdarstellung)**.** Für $z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$$z_k = r_k e^{i\varphi k} \qquad k = 1, 2 \text{ gilt.}$$

(a) $\overline{z} = r \cdot e^{-i\varphi}$

(b) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

(c) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

(d) $z^n = r^n e^{in\varphi}$
insbesondere gilt die Formel von de Moivre:
$$\left(e^{i\varphi}\right)^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) = e^{in\varphi}.$$

Beweis. (a) $\overline{z} = \overline{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = r \cdot e^{-\varphi}$

(b)
$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 \left(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2\right) + i\left((\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \sin\varphi_1)\right) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \end{aligned}$$

(c) folgt aus 2

(d) folgt aus 2

□

tolle Grafik von der Kostina, die gibt's nur in der Vollversion.

Bemerkung 2 (Beobachtungen)**.** 1. $e^{i\varphi} = 1 \iff \varphi \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Beweis. durch Behauptung. □

2. $e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2} \iff \varphi_1 - \varphi_2 \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Satz 2 (n-te Wurzel in $\mathbb{C}$)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 \neq w = re^{i\varphi}$ hat die Gleichung $z^n = w$ genau n verschiedene Lösungen.

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\varphi + 2\pi k) \cdot \frac{1}{n}} \qquad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Beweis. Sei $z = \rho e^{i\psi}$. Dann:

$$\begin{aligned} z^n &= \rho^n e^{in\psi} \overset{!}{=} re^{i\varphi} = w \\ \iff \rho^n &= r \text{ und } n\psi = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \iff \varrho &= \sqrt[n]{r} \text{ und } \psi = \frac{1}{n}(\varphi + 2\pi k) k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Betrachte: $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\psi_k}, \psi_k = \frac{1}{n}\left(\varphi + 2\pi k\right), k = 0, 1, \dots, n-1$

1. Alle z_k sind paarweise verschieden (klar).
2. Wir zeigen, dass es keine weiteren Lösungen gibt. Sei z eine beliebige Lösung $z^n = w$ und $z = |z| \cdot (\cos\psi + i \sin\psi)$. Es gilt $|z|^n = |w|$ und folglich $|z| = \sqrt[n]{|w|} = \sqrt[n]{r}$.

   Weiterhin ist $n\psi = \varphi + 2\pi l$ für ein $l \in \mathbb{Z}$ (wegen $(e^{i\psi})^n = e^{in\psi}$), dann $\psi = \frac{\varphi}{n} + l\frac{2\pi}{n}$.

   Teile l durch n mit Rest: $l = k + s \cdot n$.

   $$\frac{l}{n} = s + \frac{k}{n}, s \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n-1.$$

   Dann

   $$\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}(k + sn) = \underbrace{\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)}_{\psi_k} + 2\pi s.$$

   $\implies z = z_k, 0 \leq k \leq n-1$
   $\implies$ Alle Lösungen gefunden

$\square$

Bemerkung 3 (Geometrische Interpretation)**.** Die Lösungen sind die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks auf dem Kreis mit Radius $|z| = \sqrt[n]{r}$.

Im Fall $w = 1$ heißen z_k die n-ten Einheitswurzeln.

Beispiel 1. Die dritten Einheitswurzeln sind

$$\begin{aligned} &\left\{e^{i2k\pi\frac{1}{3}}, k = 0, 1, 2\right\} \\ &= \left\{\cos\left(k\frac{2\pi}{3} + i\sin(k\frac{2\pi}{3}, k = 0, 1, 2\right)\right\} \\ &= \left\{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}. \end{aligned}$$