Satz 1 (monoton + beschränkt $\implies$ konvergent)**.** Eine monoton wachsende (fallende) nach oben (unten) beschränkte Folge konvergiert gegen ihr Supremum:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n := \sup\{a_n | n\in\mathbb{N}\} = \min\{c\in\mathbb{R} | a_n \le c\}.$$

bzw. ihr Infimum:

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n := \inf\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\} = \max\{c\in\mathbb{R} \mid a_n \ge c\}.$$

Beweis. Gegeben $a_n \le a_{n+1}\ \forall n\in\mathbb{N}$, $a_n \le c\ \forall n\in\mathbb{N}$. Definiere $s := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Z.z.: $a_n \to s$. Sei $\epsilon > 0$. Dann $s-\epsilon$ keine obere Schranke, d.h. $\exists n_\epsilon \in\mathbb{N}$ mit $s-\epsilon < a_{n_\epsilon}$.

Damit $s-\epsilon < a_{n_\epsilon} \le a_n \le s < s+\epsilon\ \forall n \ge n_\epsilon$
$\implies |a_n - s| < \epsilon\ \forall n\ge n_\epsilon \implies a_n \to s$

□

Satz 2 (Bolzano-Weierstraß)**.** Jede beschränkte Folge besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge.

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, d.h. $\exists a,b\in\mathbb{R}$, s.d. $a\le a_n\le b\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Konstruiere induktiv eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $I_k := [a_k, b_k]$ mit:

(1) I_k enthält unendlich viele Folgenelemente von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) $I_k \subset I_{k-1}\ \forall k\in\mathbb{N}, k\ge 2$

(3) $(b_k - a_k) \le 2^{1-k}(b_1 - a_1)\ \forall k\in\mathbb{N}$

Für $k = 1$ wähle $a_1 := a$, $b_1 := b$.
$k\to k+1$: Intervall $I_k := [a_k, b_k]$ mit Eigenschaften (1)-(3) sei konstruiert.

Berechne $M := \frac{a_k+b_k}{2}$ (Mitte des Intervalls I_k). Wegen (1): $[a_k, M]$ oder $[M, b_k]$ enthält unendlich viele Folgenelemente.

Setze:

$$I_{k+1} := \begin{cases} [a_k, M] & \text{falls } [a_k, M] \text{ unendlich viele Folgenelemente enthält} \\ [M, b_k] & \text{falls } [M, b_k] \text{ unendlich viele Folgenelemente enthält} \end{cases}$$

in beiden Fällen:

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2} \overset{(3)}{\le} \frac{1}{2} 2^{1-k}(b_1 - a_1) = 2^{-k}(b_1 - a_1).$$

$\implies$ (1) - (3) erfüllt für I_{k+1}.

Wir definieren eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $a_{n_k} \in I_k\ \forall k\in\mathbb{N}$:
$k = 1$: Setze $a_{n_1} := a, n_1 := 1$.
$k\to k+1$: Wegen (1) ex. ein Index $n_{k+1} > n_k$ mit $a_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$.

I_k bilden eine Intervallschachtelung:

$$\implies \underbrace{a_k}_{\to a} \le a_{n_k} \le \underbrace{b_k}_{\to a} \overset{\text{Sandwich}}{\implies} a_{n_k} \to a, k\to\infty.$$

□

Beispiel 1. $a_n = (-1)^n$. Teilfolge: $(1,1,1,1,\dots) \to 1$, $(-1,-1,-1,\dots) \to -1$.

Definition 1 (Häufungspunkt)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann heißt $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt der Folge, falls $\forall \epsilon > 0$ gilt $|a_n - a| < \epsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 2.

1. $a_n = (-1)^n$ hat zwei Häufungspunkte 1 und -1.
2. Falls $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dann ist a Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bemerkung 1. Zu jedem Häufungspunkt a ex. eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert, also $a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$:

$$a \text{ Häufungspunkt} \iff a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \text{ für eine } (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}.$$

Beweis. (i) „ $\Longrightarrow$ ": Sei a Häufungspunkt (HP). Wähle $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_1} \in D_1(a) = \{x \mid |x-a| < 1\}$.
Sei $n_1, \ldots, n_{k-1}$ bereits gewählt.
Wähle $n_k > n_{k-1}$, s.d. gilt:

$$a_{n_k} \in D_{\frac{1}{k}}(a) = \left\{ x \mid |x-a| < \frac{1}{k} \right\}.$$

Dann ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$.
$\Longrightarrow a_{n_k} \to a, k \to \infty$.

(ii) „ $\Longleftarrow$ ": Sei $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Zu zeigen: a ist HP.

Sei $\epsilon > 0$. Dann ex. $k_\epsilon \in \mathbb{N}$, s.d. $\forall k \geq k_\epsilon$ gilt:

$$|a_{n_k} - a| < \epsilon \Longrightarrow \forall k \geq k_\epsilon \quad a_{n_k} \in D_\epsilon(a).$$

□

Bemerkung 2. Satz von Bolzano-Weierstraß besagt, dass jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ mindestens einen HP besitzt.

Definition 2 (Limes Superior)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, dann definiere eine reelle Folge $(s_n)_{n\in N}$ durch $s_n := \sup\{a_k \mid k \geq n\}$.

$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend. Ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt, dann definiere

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n := \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k \mid k \geq n\}.$$

Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach oben beschränkt ist, setzte $\lim_{n\to\infty} \sup a_n := +\infty$.

Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, aber $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nicht* nach unten beschränkt ist, setze $\lim_{n\to\infty} \sup a_n := -\infty$.

Beispiel 3.

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup a_n = a$.
2. $\lim_{n\to\infty} \sup (-1)^n = \lim_{n\to\infty} \sup \{(-1)^k \mid k \geq n\} = 1$
3. $\lim_{n\to\infty} \sup n = +\infty$
   $\lim_{n\to\infty} \sup (-n) = -\infty$

Definition 3 (Limes Inferior)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann setze:

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n := -\lim_{n\to\infty} \sup (-a_n).$$

Beispiel 4.

1. $\lim_{n\to\infty} \sup (n^2) = +\infty$
   $\lim_{n\to\infty} \inf (n^2) = -\lim_{n\to\infty} \sup \{-k^2 \mid k \geq n\} = -\lim_{n\to\infty}(-n^2) = +\infty$

2.

$$a_n := \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

$(a_n) = (0, 1, 0, 2, 0, 3, \ldots)$
$\lim_{n\to\infty} \inf a_n = 0$
$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = +\infty$

Satz 3 (Charakterisierung von lim sup und lim inf)**.** Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen.

1. $\lim_{n\to\infty} \sup a_n = a \in \mathbb{R} \iff$
   $\forall \epsilon > 0$ gilt:
   (i) $a_n < a + \epsilon$ für fast alle $n \in N$.
   (ii) $a_n > a - \epsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.
2. $\lim_{n\to\infty} \inf a_n = a \in \mathbb{R} \iff$
   $\forall \epsilon > 0$ gilt:
   (i) $a_n > a - \epsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$
   (ii) $a_n < a + \epsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.
3. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn:
   $$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \lim_{n\to\infty} \inf a_n = a \in \mathbb{R}.$$
   In diesem Fall gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Bemerkung 3. Satz 3 impliziert:

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \sup \{\text{HP von}(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$$
$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n = \inf \{\text{HP von } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\}.$$

$\forall \epsilon > 0$ liegen unendlich viele Folgenelemente im offenen Intervall

$$\left(\lim_{n\to\infty} \sup a_n\right) - \epsilon < a_n < \left(\lim_{n\to\infty} \sup a_n\right) + \epsilon \qquad (1\ (\text{i})\ (\text{ii})).$$

bzw.

$$\left(\lim_{n\to\infty} \inf a_n\right) - \epsilon < a_n < \left(\lim_{n\to\infty} \inf a_n\right) + \epsilon \qquad (2\ (\text{i})\ (\text{ii})).$$

Fast alle Folgenelemente erfüllen:

$$\left(\lim_{n\to\infty} \inf a_n\right) - \epsilon < a_n < \left(\lim_{n\to\infty} \inf a_n\right) + \epsilon \qquad (1\ (\text{i})\text{ und } 2\ (\text{i})).$$