Satz 0.1 (Majoranten Kriterium). Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine reelle Reihe ($b_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$).

(i) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent und gilt $|a_n| \leq b_n$ ($a_n \in \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$) für fast alle $n \in \mathbb{N}$ (d.h. $\forall n \geq N_0$), so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ heißt Majorante der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(ii) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent und $a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \geq |b_n|$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist die reelle Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ heißt Minorante der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beweis. (i) $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}, (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Partialsummen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann

$$|s_n - s_m| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} b_k = |t_n - t_m|.$$

$\implies (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist C.F.
$\implies (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(ii) Ann. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergente Majorante zu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert. Widerspruch.

□

Beispiel 0.2. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$.

$$2^n = (1+1)^n \geq 1 + n \quad \forall n \implies \frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{1+n} < 1 \quad \forall n.$$

$\implies$

$$\frac{n}{4^n} \leq \frac{n}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^n} \quad \forall n.$$

$\implies \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$ konvergente Majorante für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ist divergent, weil $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ ($\sqrt{n} \geq 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergente Minorante.

Satz 0.3 (Quotientenkriterium). Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $|a_n| \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}(a_n \in \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R})$.

(i) Falls ein $0 < q < 1$ existiert mit

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0,$$

dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(ii) Falls $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1 \quad \forall n \geq N_0$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Kostina glaubt, dass das so stimmt, aber offensichtlich ist sie sich nicht sicher.

Beweis. (i) $\forall n \geq N_0$ gilt:

$$|a_n| \leq q|a_{n-1}| \leq \ldots \leq q^{n-N_0}|a_{N_0}|.$$

$\implies \frac{|a_{N_0}}{q^{N_0}} \sum_{n=1}^{\infty} q^n$ ist konvergente Majorante.

(ii) $|a_n| \geq |a_{n-1}| \geq \ldots \geq |a_n| \implies (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

□

Beispiel 0.4 (Exponentialreihe). $\forall z \in C$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} =: \exp(z) \text{ oder } e^z.$$

Zahl $e := \exp(1)$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ absolut konvergent, für alle $z \in \mathbb{C}$.

$$a_n := \frac{z^n}{n!} \implies \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|z|^n}{n!}} = \frac{|z|}{n+1}.$$

Für $n \geq 2|z|$ gilt:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|z|}{n+1} \leq \frac{1}{2} =: q < 1.$$

Satz 0.5 (Wurzelkriterium)**.** Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe ($a_n \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

(i) Falls $\exists \quad 0 < q < 1$ und $N_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \quad \forall n \geq N_0,$$

so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(ii) Falls $\exists N_0$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ $\forall n \geq N_0$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Beweis. 1. Für $n \geq N_0$ ist $|a_n| \leq q^n \implies$ konvergente Majorante

2. $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \implies |a_n| \geq 1 \implies (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge $\implies$ Divergenz.

□

Bemerkung 0.6. Im Quotientenkriterium und Wurzelkriterium wird gefordert:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \text{ bzw. } \sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1.$$

Die Forderung $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ bzw. $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ reicht nicht: Bsp.: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent.

Satz 0.7 (Verdichtungskriterium von Cauchy)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}_+$, eine reelle, positive monoton fallende Nullfolge. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \iff \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2k} \text{ konvergent.}$$

Beweis. durch Übung. □

Beispiel 0.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

1. $\alpha \leq 0$: $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge $\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ divergent.

2. $\alpha > 0$:

$$\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

eine monoton fallende Nullfolge mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} (\underbrace{2^{1-\alpha}}_{=:q})^k = \sum_{k=1}^{\infty} q^k.$$

mit $q = 2^{1-\alpha}$

Falls $|q| < 1 \iff$ konvergenz
d.h. $\alpha > 1 \iff$ konvergenz

0.1 Umordnen von Reihen

Definition 0.9 (Umordnung)**.** Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $\tau : N \to N$ eine bijektive Abbildung.

Dann heißt $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = a_{\tau(1)} + a_{\tau(2)} + \dots$ eine Umordnung der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beispiel 0.10.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \text{ konvergiert.}$$

Umordnung:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{6} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}}_{>4\frac{1}{15}>\frac{1}{4}} - \frac{1}{8}$$

$$+ \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+3} + \dots + \frac{1}{2^n+2^n-1}\right)}_{>2^{n-1}\frac{1}{2^{n+1}-1}>\frac{1}{4}} - \frac{1}{2n+2}.$$

divergiert!

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergent, aber nicht absolut konvergent, deshalb kann eine Umordnung die Konvergenzeigenschaften drastisch ändern !!!

Satz 0.11 (Umordnungssatz)**.** Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe.

Dann konvergiert jede Umordnung dieser Reihe absolut gegen denselben Grenzwert.

Beweis. Forster. □

Bemerkung 0.12. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine reelle Reihe, welche konvergiert, aber nicht absolut, so gibt es zu jedem $c \in \mathbb{R}$ oder $c = \pm\infty$ eine Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$, welche gegen $c \in \mathbb{R}$ konvergiert (oder divergiert).

0.2 Das Cauchy-Produkt von Reihen

Satz 0.13 (Cauchy-Produkt)**.** Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei c_n definiert durch

$$c_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0.$$

Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent mit $\sum_{k=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$

Beweis. Forster. □

Bemerkung 0.14. Die Voraussetzung der absoluten Konvergenz ist wichtig:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ mit } a_n := b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

konvergieren, aber ihr Cauchy-Produkt:

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

divergiert

Beweis. durch Übung. □

Beispiel 0.15. Für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Beweis.

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}.$$

Bilde Cauchy-Produkt

.

$$\begin{aligned} c_n &:= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!}(x+y)^n. \end{aligned}$$

□

Korrolar 0.16. (i) $\forall z \in \mathbb{C}$ gilt $(\exp(z))^{-1} = \exp(-z)$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) > 0$

(iii) $\forall n \in \mathbb{Z}$ ist

$$\exp(n) = e^n = \begin{cases} e \cdot e \cdot \ldots \cdot e & n > 0 \\ e^{-1} \cdot e^{-1} \cdot \ldots \cdot e^{-1} & n < 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}.$$

Beweis. (i) $\exp(-z) \cdot \exp(z) = \exp(-z+z) = \exp(0) = 1$

(ii) Für $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ ist $\exp(z) = 1 + x + \ldots > 0$
Für $x < 0$ ist $(\exp(x))^{-1} = (\exp(-x)) > 0 \implies \exp(x) > 0$.

(iii) Zz.: $\exp(n) = e^n \ \forall n \in \mathbb{N}$
Vollständige Induktion:
$n = 1 : \exp(1) = e$ nach Definition
$n \to n+1 : \exp(n+1) = \exp(n) \cdot \exp(1) = e^n \cdot e = e^{n+1}$
Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < 0$ gilt:
$(\exp(n))^{-1} = \exp(-n) = e^{-n} \implies \exp(n) = e^n$

□

0.3 Potenzreihen

Definition 0.17. Eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, z \in \mathbb{C}.$$

$a_n \in \mathbb{C}, \forall n \in N_0$

Beispiel 0.18 (Exponentialreihe). $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ mit Entwicklungspunkt $0 \in \mathbb{C}$ konvergiert für $\forall z \in \mathbb{C}$.

Definition 0.19 (Konvergenzradius)**.** Zur Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ definiere den Konvergenzradius ρ durch

$$\rho := \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Satz 0.20. (i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konvergiert absolut $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| < \rho$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ divergiert für $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| > \rho$

(iii) für $|z-z_0| = \rho$ ist keine allgemeine Aussage möglich.

Beispiel 0.21.

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}}_{\text{divergent für }|x|=1} \qquad x^k \qquad \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}}_{\text{div für }|z} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}.$$

ρ für alle Reihen.