Folgerung: Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$ und $f(a) \neq 0$. Dann $\exists \delta > 0$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in D \cap]a-\delta, a+\delta[$, d.h. es ex. Umgebungen von a, s.d. $f(x) \neq 0$ für alle Punkte in dieser Umgebung.

Beweis. Wähle $\epsilon := \frac{|f(a)|}{4} > 0$. Dann $\exists \delta > 0$ mit $|f(x) - f(a)| < \epsilon \ \forall x \in D$ mit $|x-a| < \delta$.

$$\implies |f(x)| \geq |f(a)| - |\underbrace{f(x) - f(a)}_{<\epsilon}| > |f(a)| - \frac{|f(a)|}{4} = \frac{3}{4}|f(a)| > 0.$$

$\forall x \in D$ mit $|x-a| < \delta$ □

Satz 0.1.
1. Es sei $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$. Dann sind $\lambda f + \mu g \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$ und falls $g(x) \neq 0 \ \forall x \in D$ $\frac{f}{g}$ stetig in a.
2. Sei f stetig in $a \in D$ mit $f(D) \subset \overline{D} \subset \mathbb{R}$ und $h\colon \overline{D} \to \mathbb{R}$ stetig in $f(a)$. Dann ist die Komposition $(h \circ f)\colon D \to R, (h \circ f)(x) := h(f(x))$ stetig in a.

Beweis.
1. folgt aus Rechenregeln für konvergente Folgen. z.B.: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Dann
$$(f+g)(a) = \lim_{n\to\infty} (f+g)(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = f(a) + g(a).$$
2. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Dann:
$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{y_n := f(x_n)} = b =: f(a).$$
$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\overline{D}$. Aus Stetigkeit von h in b folgt:
$$\lim_{n\to\infty} h(y_n) = h(b) \implies \lim_{n\to\infty} \underbrace{h(f(x_n))}_{(h\circ f)(x_n)} = h(f(a)).$$

□

Beispiel 0.2.
1. Alle Polynome
$$f(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$
sind stetig in $\mathbb{R}$.
2. Rationale Funktionen $\frac{f}{g}$ mit Polynomen f, g $(g \neq 0)$ sind stetig in $D := \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$.
3. f stetig in D, dann ist auch $|f|\colon D \to \mathbb{R}$ stetig, als Komposition: $(|\cdot| \circ f)(x)$.
4. Heaviside Funktion ist stetig $\forall x \in R \setminus \{0\}$.
5. Dirichlet-Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$
ist in keinem Punkt stetig.

   Beweis. Sei $a \in \mathbb{Q}$. Es existiert eine Folge
$$x_n := a + \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$
   aber
$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{=0} = 0 \neq 1 = f(a).$$
   Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Es ex. eine Folge von rationalen Zahlen x_n mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. $x_n \in \mathbb{Q} \ \forall n \in \mathbb{N}$ (Konstruktion von reellen Zahlen) es gilt
$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{f(x_n)}_{=1} = 1 \neq 0 = f(a).$$

□

0.1 Weitere Eigenschaften stetiger Funktionen

Definition 0.3 (offene, abgeschlossene, kompakte Mengen)**.** Eine Menge $D \subset \mathbb{R}$ heißt offen, falls $\forall x \in D\ \exists r > 0$ mit

$$B_r(x) :=]x - r, x + r[\subset D.$$

d.h. jeder Punkt besitzt eine Umgebung, welche ganz in D liegt.

Eine Menge $D \subset \mathbb{R}$ heißt abgeschlossen, falls die Grenzwerte von konvergenten Folgen aus D wieder in D liegt, d.h. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies x_0 \in D$.

$D \subset \mathbb{R}$ heißt kompakt, falls D beschränkt und abgeschlossen ist. (beschränkt $\overset{\text{def.}}{=} \exists C > 0$ mit $|x| < C\ \forall x \in D$)

Beispiel 0.4.

1. $]0,1[$ ist offen. $\forall x \in\ ]0,1[$ setze $r := \frac{1}{2}\min\{x, 1-x\}$. Man kann zeigen, dass $B_r(x) \subset\ ]0,1[$

   $]0,1[$ ist nicht abgeschlossen, weil $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset\ ]0,1[$. mit $\frac{1}{n} \to 0 \notin\ ]0,1[$.

2. $[0,1]$ ist kompakt. $x \in [0,1] \implies |x| \leq 1 \implies [0,1]$ beschränkt.

   Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,1]$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Dann gilt

   $$0 \leq x_n \leq 1\ \forall n \overset{\text{Sandwich}}{\implies} 0 \leq x_0 \leq 1 \implies x_0 \in [0,1] \quad \text{abgeschlossen.}$$

   $[0,1]$ ist nicht offen, da $0 \in [0,1]$, aber $\underbrace{]-r, r[}_{B_r(0)\subset[0,1]} \quad \forall r > 0$

3. $\mathbb{R}$ ist offen, abgeschlossen aber nicht kompakt.

Lemma 0.5 (Folgenkompakt)**.** $D \subset \mathbb{R}$ ist kompakt genau dann wenn, alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D eine konvergente Teilfolge enthalten mit Grenzwert in D.

Beweis.

- „ $\implies$ " Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D, Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\implies$ nach Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset D \overset{D \text{ abgeschlossen}}{\implies} \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in D$

- „ $\impliedby$ " Angenommen. D ist unbeschränkt, d.h. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in D$ mit $|x_n| \geq n$.

  Dann enthält $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge, weil alle Teilfolgen unbeschränkt sind. Widerspruch $\implies D$ ist beschränkt.

  Bleibt zu zeigen: D ist abgeschlossen. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $x_n \to x_0, n \to \infty$. Nach Voraussetzungen existiert eine konvergente Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Limes in D. Da alle Teilfolgen ebenfalls gegen x_0 konvergieren folgt, dass $x_0 \in D$.

$\square$

Satz 0.6 (Das stetige Bild kompakter Mengen ist kompakt)**.** Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig mit $D \subset \mathbb{R}$ kompakt. Dann ist $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$ kompakt.

Beweis. Zu zeigen: $f(D)$ ist kompakt. Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $f(D)$. Dann ex. eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $f(x_n) = y_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ (f stetig).

D kompakt $\implies \exists$ Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in D$.

$$f \text{ stetig} \implies f(x_{n_k}) = \underbrace{y_{n_k}}_{\text{Teilfolge in } f(D)} \to f(x_0) \in f(D).$$

$\square$

Definition 0.7 (Supremum, Infimum, Maximum, Minimum reellwertiger Funktionen)**.** Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sup_{x\in D} f(x) \quad & \text{kleinste obere Grenze der Bildmenge } B_f := \{f(x) \mid x \in D\} \\ & := \sup\, B_f := \min\{\beta \in \mathbb{R} \mid y \leq \beta \ \forall y \in B_f\}. \end{aligned}$$

$$\inf_{x\in D} f(x) \ := \inf\, B_f := \min\{\beta \in \mathbb{R} \mid y \leq \beta \ \forall y \in B_f\}.$$

Falls $B_f := f(D)$ beschränkt ist, dann $\exists$ inf und sup.

$x_min \in D$ heißt Minimum, x_max Maximum von f, falls

$$\begin{cases} \inf\, f(x) = f(x_{min}) =: \min\, f(x) \\ \sup\, f(x) = f(x_{max}) =: \max\, f(x) \end{cases}.$$

Satz 0.8. Stetige reelwertige Funktionen nehmen auf kompakten Mengen ihr Minimum und Maximum an, d.h. $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig, D kompakt, dann ex. $x_{min}, x_{max} \in D$ mit
$f(x_{min}) = \inf\, \{f(x) \mid x \in D\}$
$f(x_{max}) = \sup\, \{f(x) \mid x \in D\}$

Beweis. Folgt aus Satz. Zunächst $f(D)$ ist beschränkt, d.h. dass Supremum und Infimum von $f(D)$ existieren. Nach Definition von $s := \sup\, \{f(x) \mid x \in D\}$ ex. eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $f(x_n) \to s, n \to \infty$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_{n_k} \to x_{max}$, $k \to \infty$, $x_{max} \in D$.
$\implies f(x_{n_k}) \to f(x_{max}), k \to \infty$
$\implies$ Behauptung für Supremum $\square$

Satz 0.9 (Zwischenwertsatz)**.** Sei $f\colon \underbrace{[a,b]}_{\text{kompakt}} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \neq f(b)$. Dann gibt es zu jedem y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ $(*)$ mindestens ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = y$.

$*$ d.h. $f(a) \leq y \leq f(b)$ falls $f(a) \leq f(b)$, sonst $f(b) \leq y \leq f(a)$)