Satz 0.1 (Reihenentwicklung Sinus / Cosinus)**.** Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt (absolut konvergente Potenzreihendarstellung)

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots .$$

und

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots .$$

Beweis. Die absolute Konvergenz folgt als Teilreihe der Exponentialreihe (als Majorante)

Es gilt für $m \in \mathbb{N}_0$

$$i^n = \begin{cases} 1 & n = 4m \\ i & n = 4m+1 \\ -1 & n = 4m+2 \\ -i & n = 4m+3 \end{cases}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{x^n}{n!} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{\cos(x)} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sin(x)}. \end{aligned}$$

□

Satz 0.2 (Restgliedabschätzung Sinus / Cosinus)**.** Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+2}(x).$$

und

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+3}(x).$$

mit

$$|R_{2n+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \text{ für } |x| \leq 2n+3.$$

bzw.

$$|R_{2n+3}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} \text{ für } |x| \leq 2n+4.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} R_{2n+2}(x) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-(n+1)} \frac{x^{2(k-(n+1))}}{(2k)! \frac{1}{(2n+2)!}} \right) \\ &= (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}(2n+2)!}{(2k+2n+2)!} \right). \end{aligned}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ setze

$$\begin{aligned} a_k &:= \frac{x^{2k}(2n+2)!}{(2k+2n+2)!} = \frac{x^{2k}}{(2n+3)(2n+4)\dots(2k+2n+2)} \\ a_{k-1} &= \frac{x^{2k-2}(2n+2)!}{(2k+2n)!} \end{aligned}$$

damit

$$a_k = a_{k-1} \cdot \frac{x^2}{(2k+2n+1)(2k+2n+2)}.$$

Es gilt für $|x| \leq 2n+3, k \geq 1$

$$\frac{x^2}{(2k+2n+1)(2k+2n+2)} \leq \frac{(2n+3)^2}{(2n+3)(2n+4)} < 1.$$

$\Longrightarrow$

$$a_k \leq \frac{(2n+3)^k}{(2n+4)^k} a_0 \quad a_0 = \frac{1}{(2n+2)!}.$$

$\overset{\text{Leibniz}}{\Longrightarrow}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k.$$

konvergent mit

$$0 < \underbrace{\underbrace{1 - a_1}_{>0} + \underbrace{a_2 - a_3}_{>0} + \underbrace{a_4 - \ldots}_{>0}}_{<1} < 1.$$

$\Longrightarrow$

$$|R_{2n+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \text{ für } |x| \leq 2n+3.$$

Genauso für $R_{2n+3}(x)$ (Sinus). $\square$

Lemma 0.3. Sinus und Cosinus Funktionen haben das folgende Verhalten

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin(x)}{x} - 1 \right| &= \left| \underbrace{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}}_{\frac{\sin(x)}{x}} - \ldots - 1 \right| \\ &= \left| x \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k+1)!} \right| \\ &\overset{|x|<1}{\leq} |x| \cdot \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \right| \leq |x| \cdot e. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\underbrace{\left| \frac{\sin(x)}{x} - 1 \right|}_{\to 0} \leq \underbrace{|x| \cdot e}_{\to 0}.$$

genauso für $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}$. $\square$

0.1 Die Zahl π

Ziel: Analytische Definition von $\pi \in \mathbb{R}$.

Satz 0.4 (und Definition)**.** Die Funktion $\cos\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ hat genau eine Nullstelle im Intervall $[0,2]$, welche mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet wird ($\pi := 2\frac{\pi}{2}$).

Beweis. in 4 Schritten.

Schritt 1 / Lemma 1: $\cos(2) \leq -\frac{1}{3}$.
Restgliedabschätzung liefert ($|x| \leq 5$).

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + R_4(x) \text{ mit } |R_4(x)| \leq \frac{|x|^4}{24}.$$

$\Longrightarrow$

$$\cos(2) = 1 - 2 + \underbrace{R_4(2)}_{\leq \frac{16}{24} = \frac{2}{3}} \leq -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Schritt 2 / Lemma 2: $\sin(x) > 0 \ \forall x \in]0,2[$
Es gilt

$$\sin(x) = x + R_3(x) = x(1 + \frac{R_3(x)}{x}) \left| \frac{R_3(x)}{x} \right| \leq \frac{|x|^2}{6} \overset{0<x\leq 2}{\leq} \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$\Longrightarrow$

$$1 + \frac{R_3(x)}{x} \geq \frac{1}{3}.$$

Schritt 3 / Lemma 3: $\cos : [0,2] \to \mathbb{R}$ ist streng monoton fallend.
Sei $0 \leq y < x \leq 2$. Dann gilt

$$\cos(x) - \cos(y) \overset{\text{Additionstheorem}}{=} -2 \underbrace{\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}_{>0} \underbrace{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}_{>0} < 0.$$

Schritt 4 (Beweis der Definition von π) $\cos(0) = 1$ (nach Definition).

$$\cos(2) \leq -\frac{1}{3} \overset{\text{Zwischenwertsatz}}{\Longrightarrow} \exists x_0 \in [0,2] \text{ mit } \cos(x_0) = 0.$$

Nach Lemma 3 ist x_0 eindeutig. □

Korrolar 0.5 (Spezielle Werte von exp)**.** Es gilt: $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$, $e^{2\pi i} = 1$

Beweis. Übung. □

Korrolar 0.6 (Eigenschaften Sinus / Cosinus)**.** $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
2π: Periodizität

(ii) $\cos(x + \pi) = -\cos(x) \quad \sin(x + \pi) = -\sin(x)$

(iii) $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \quad \sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

(iv) Nullstellen von $\sin / \cos$.
$\{x \in \mathbb{R} | \sin x = 0\} = \{x = k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
$\{x \in \mathbb{R} | \cos x = 0\} = \{x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

Beweis. folgt aus den Additionstheoremen, der Definition von $\frac{\pi}{2}$, den speziellen Werten von exp und folgender Tabelle

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$\sin x$	0	1	0	-1	0

. □

Korrolar 0.7 ($e^z = 1$)**.** Es gilt $\{z \in \mathbb{C} | e^z = 1\} = \{i2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$

Beweis. ohne Beweis. □

Definition 0.8 (Tangens, Cotangens)**.** (i) Die Tangensfunktion

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \{x = (k + \frac{1}{2})\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

ist definiert durch

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}.$$

(ii) Die Cotangensfunktion

$$\cot : \mathbb{R} \setminus \{x = k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

ist definiert durch

$$\cot x := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

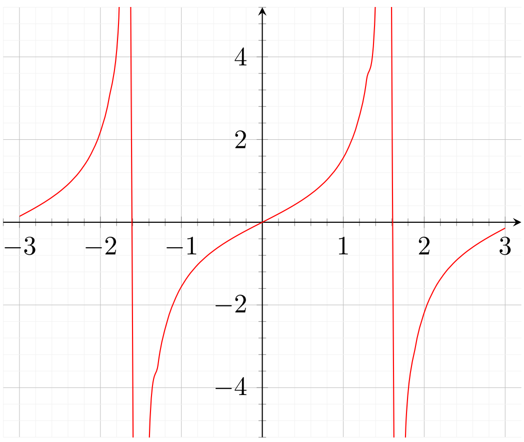

Abbildung 1: $\tan(x)$

Definition 0.9 (Arcusfunktionen (Umkehrfunktionen der Trigonometrischen Funktionen))**.** (i) $\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ ist streng monoton fallend und bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt Arcus-Cosinus.

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi].$$

(ii) $\sin\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ ist streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt Arcus-Sinus.

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

(iii) $\tan\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt

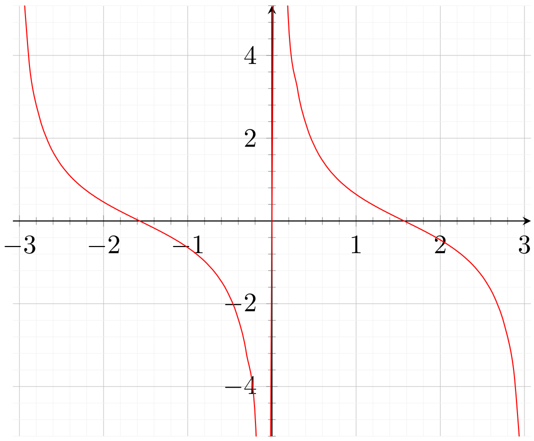

Abbildung 2: $\cot(x)$

Arcus-Tangens.

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

Satz 0.10 (Polarkoordinaten)**.** Jedes $z \in \mathbb{C}$ lässt sich schreiben als $z = r \cdot e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ und $r = |z| \in [0, \infty[$.

Für $z \neq 0$ ist φ bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt.

Beweis. Rannacher. □