1 Differentiation

1.1 Ableitung

Definition 1.1. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, eine Funktion. Definiere Differenzenquotienten in $x_0 \in D$.

$$D_h f(x_0) := \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

für Inkrement $h \in \mathbb{R}$ mit $x_0 + h \in D$.

Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar im Punkt $x_0 \in D$ mit Ableitung $f'(x_0)$, wenn für jede Nullfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_0 + h_n \in D$ die Folge $(D_{h_n} f(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Bemerkung 1.2.

1. Ist eine Funktion differenzierbar in $x_0 \in D$, so haben die Folgen von Differenzenquotienten alle denselben Limes.

$$f'(x_0) := \lim_{x_0+h\in D\ h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

2. In anderen Worten: Differenzierbarkeit in $x_0 \in D$ $\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow}$

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

3. Notationen:

$$f'(x_0),\ \frac{df(x_0)}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x_0),\ \frac{df}{dx}(x_0).$$

4. Ist $x_0 \in D$ ein Randpunkt, z.B.: unterer oder oberer Endpunkt von $D = [a, b]$, dann wird in der Definition der rechts- oder linksseitige Grenzwert gebildet. Man spricht von der links- oder rechtsseitigen Ableitung.

$$\lim_{x\nearrow x_0 \text{ oder } x\uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

(: $\Longleftrightarrow$ $x < x_0, x \to x_0$). Analog für die rechtsseitige Ableitung.

5. f heißt differenzierbar auf D, wenn sie $\forall x_0 \in D$ differenzierbar (bzw. einseitig differenzierbar im Falle eines Randpunktes) ist. f heißt stetig differenzierbar, falls die Ableitung $f'\colon D \to \mathbb{R}$ auf D stetig ist.

6. Differenzierbarkeit bedeutet: Man kann die Funktion f in x_0 „gut” durch eine affin-lineare Funktion annähern (affin-linear: Polynom vom Grad 1).

Satz 1.3 ($\epsilon - \delta$ Sprache)**.** Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in D$ differenzierbar mit $f'(x_0)$ $\Longleftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon > 0$, s.d. $\forall x_0 + h \in D$, $|h| < \delta_\epsilon$:

$$\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < \epsilon.$$

Beweis. trivial. □

Satz 1.4 (differenzierbar $\Longleftrightarrow$ linear approximierbar)**.** $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in $x_0 \in D$, genau dann wenn eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + R(x).$$

Für das Restglied $R(x) = R(x, x_0)$ gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0.$$

In diesem Falle ist c eindeutig bestimmt mit $c = f'(x_0)$.

Beweis. „ $\Longrightarrow$ ": Sei f differenzierbar mit $c = f'(x_0)$. Definiere Funktion

$$R(x) := f(x) - f(x_0) - c(x - x_0).$$

Dann gilt

$$\frac{R(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \underbrace{c}_{f'(x_0)} \xrightarrow[x \to x_0]{f \text{ diff.}} 0.$$

„ $\Longleftarrow$ " Sei umgekehrt $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{R(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - c \xrightarrow{x \to x_0} 0.$$

, d.h.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c.$$

$\Longrightarrow f'(x_0) = c$. Limes eindeutig $\Longrightarrow f$ differenzierbar. □

Bemerkung 1.5. Aus dem Satz zur linearen Approximation folgt eine geometrische Interpretation: $f(x)$ kann in x_0 „gut" durch eine Gerade approximiert werden.

$$f(x) \approx g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

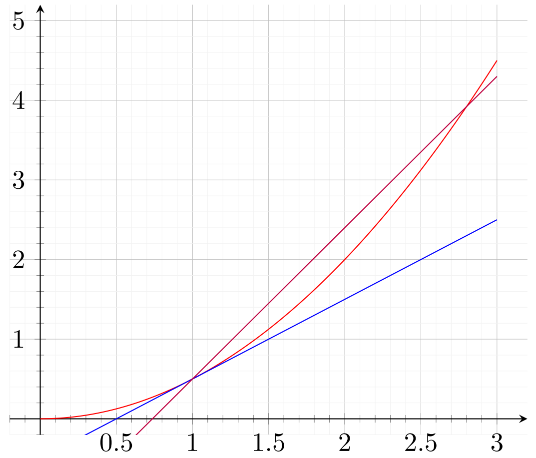
Der Graph von g ist eine Tangente. Sekante:

$$s_h(x) = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0).$$

Tangente:

$$g(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0).$$

Abbildung 1: $f(x)$ in rot, ihre Tangente (blau) und eine Sekante (lila) im Punkt $x_0 = 1$



Lemma 1.6. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$. Dann ist f stetig in x_0.

Beweis. Sei f differenzierbar, d.h.

$$\exists f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dann gilt wegen der linearen Approximation:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{R(x)}{x - x_0}(x - x_0). \end{aligned}$$

Für $x \to x_0$ geht

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} + \underbrace{\frac{R(x)}{x - x_0}}_{\to 0}\underbrace{(x - x_0)}_{\to 0}.$$

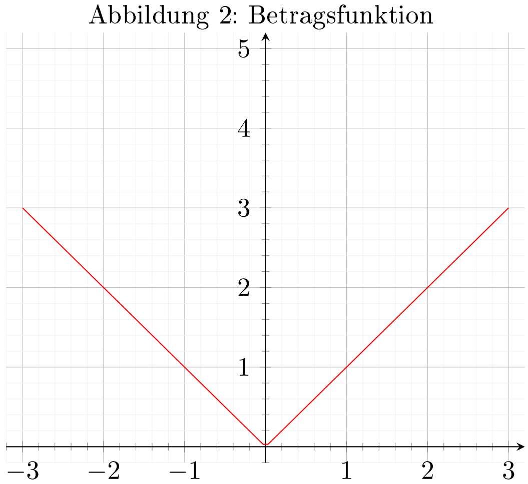
d.h. $f(x) \to f(x_0) \overset{\text{Def. Stetigkeit}}{\Longrightarrow} f$ stetig. □

Bemerkung 1.7. Umgekehrt gilt das nicht, z.B.: die Betragsfunktion.

Beispiel 1.8.

1. Konstante Funktionen $f \equiv c$ sind stetig differenzierbar mit $f'(x_0) = 0 \ \forall x_0$.
2. Lineare Funktionen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f = ax$ sind stetig differenzierbar mit $f'(x_0) = a \ \forall x_0$, weil
$$\lim_{h\to 0} \frac{a(x_0 + h) - ax_0}{h} = a.$$
3. Monomfunktion: $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$ ist stetig differenzierbar mit $f'(x) = nx^{n-1} \ \forall x$, weil
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &\overset{a^n - b^n = \dots}{=} \lim_{h\to 0} \frac{(x+h-x)(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}\cdot x + \ldots + (x-h)x^{n-2} + x^{n-1}}{h} \\ &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2}\cdot x + \ldots + x^{n-1}}_{n\text{-mal}} \\ &= nx^{n-1}.\end{aligned}$$
4. Elementare rationale Funktionen $f = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{x - (x+h)}{(x+h)\cdot x} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{\underbrace{(x+h)}_{\to x}\cdot x} = -\frac{1}{x^2}.$$
5. Betragsfunktion $f(x) = |x|$
$$f'(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}.$$
ist bei $x_0 = 0$ nicht differenzierbar. $\frac{d|x|}{dx}$ für $x_0 = 0$ existiert nicht. Allerdings existieren die einseitigen Ableitungen.

Abbildung 2: Betragsfunktion



6. Exponential-Funktion $f(x) = e^x$ ist stetig differenzierbar $\forall x$ mit $f'(x) = e^x$, weil
$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{=1} = e^x.$$

mit

$$e^h = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} = 1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3!} + \dots$$
$$\frac{e^h - 1}{h} = 1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3!} + \dots \xrightarrow{h \to 0} 1.$$

7. Sinus / Cosinus. mit $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\frac{1}{2}(x+y) \cdot \sin\frac{1}{2}(x-y)$ folgt

$$\begin{aligned}\sin'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{1}{2}h + x\right) \cdot \sin(\frac{1}{2}h)}{h} \\ &= \underbrace{\lim_{h \to 0} \cos\left(\frac{1}{2}h + x\right)}_{\to \cos x} \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\sin(\frac{1}{2}h)}{\frac{h}{2}}}_{\to 1} \\ &= \cos x.\end{aligned}$$

$\cos'(x) = -\sin(x)$ folgt analog.

Satz 1.9 (Ableitungsregeln)**.** Für die Ableitungen gelten folgende Rechenregeln. Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

1. Lineare Kombinationen $\alpha f + \beta g$ ist differenzierbar mit
$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x).$$
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
2. Produktregel
$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$
3. Quotientenregel
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2}.$$
$g(x) \neq 0$

Satz 1.10 (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion)**.** Sei $f\colon D \to B \subset \mathbb{R}$ stetige invertierbare Funktion mit Inverser
$$f^{-1}\colon B \to D..$$
Ist f in $x_0 \in D$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$. Dann ist f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar mit
$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad y_0 = f(x_0).$$

Satz 1.11 (Kettenregel)**.** Seien $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $g\colon D_g \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. $f \in x_0 \in D_f$ differenzierbar, $g \in y_0 = f(x_0) \in D_g$ differenzierbar. Dann ist $(g \circ f) : D_f \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 und es gilt die Kettenregel
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Beispiel 1.12. Für $x > 0$
$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.$$
$\ln x$ auf $]0, \infty[$ ist stetig differenzierbar.
$$\ln'(y) = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

$y = e^x$

Trick: $y = u^v$, $u = u(x), v = v(x)$

$$\begin{aligned} \ln y &= v \ln u \\ \frac{1}{y} \cdot y' &= v' \ln u + v \cdot \ln + v \cdot (\ln u)' = v' \ln u + v \frac{1}{u} u' \\ \implies y' &= y(v' \ln u + v \frac{1}{u} u') \\ \implies (u^v)' &= u^v (v' \ln u + v \cdot \frac{1}{u} u') = u^v \cdot \ln u \cdot v' + u^{v-1} \cdot v \cdot u'. \end{aligned}$$

$y = \frac{(x^2+2) \cdot \sqrt[4]{(x-1)^3} e^x}{(x+5)^3} = g(x)$
$\ln y = \ln(x^2 + 2) + \frac{3}{4}(x - 1) + x - 3 \ln(x + 5)$