Satz 0.1 (Satz von Taylor)**.** Jede Funktion $f \in C^{n+1}(D,\mathbb{R})$ lässt sich für $x, x_0 \in D$ nach Potenzen von $(x-x_0)$ entwickeln:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + R_{n+1}(x).$$

Dabei ist das Restglied $R_{n+1}(x)$:

$$R_{n+1}(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

mit ξ ein Punkt zwischen x_0 und x ($\xi = x_0 + \tau(x-x_0)$, $\tau \in (0,1)$).

Der Ausdruck

$$T_n(x) = T_n(f,x,x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

heißt Taylorpolynom n-ter Ordnung von f bei x_0.

Beweis. Für $x = x_0$: klar.

Sei $x \neq x_0$. Betrachte $R = R(x,x_0)$ definiert durch $f(x) = T_N(f,x,x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot R$.

Für $y \in D$ definiere

$$\varphi(y) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k - \frac{(x-y)^{n+1}}{(n+1)!}R.$$

Dann folgt $\varphi(x_0) = 0 = \varphi(x)$, $\varphi \in C^1$.
$\overset{\text{Satz von Rolle}}{\Longrightarrow}$ $\exists \xi$ zwischen x und x_0 mit $\varphi'(\xi) = 0$.

$$\begin{aligned}
0 = \varphi'(\xi) &= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}k(x-\xi)^{k-1}(-1) - \frac{(n+1)(x-\xi)^n}{(n+1)!}R \\
&\overset{\text{Teleskop}}{=} -\frac{f^{n+1}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + \frac{(x-\xi)^n}{n!}R \\
&= \frac{(x-\xi)^n}{n!}\left(-f^{(n+1)}(\xi) + R\right).
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $R = f^{(n+1)}(\xi)$, ξ zwischen x und x_0. □

Satz 0.2. Sei f auf einem beschränkten Intervall (a,b) eine C^∞ Funktion mit gleichmäßig beschränkten Ableitungen.

$$\sup_{x\in(a,b)} \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M < \infty.$$

Dann ist f auf (a,b) analytisch, d.h. $\forall x, x_0 \in (a,b)$ konvergiert die Taylor-Reihe von f und es gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Beweis.

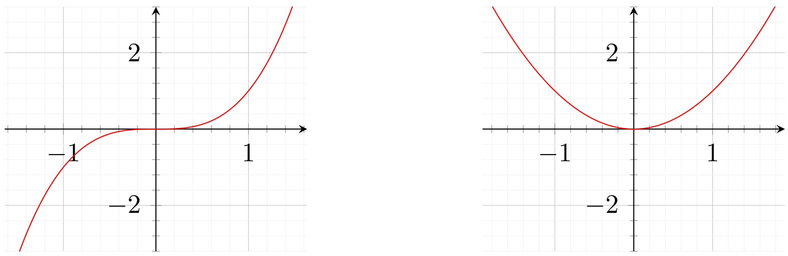
$$|f(x) - T_n(f,x,x_0)| \leq \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \leq \frac{M}{(n+1)!(b-a)^{n+1}}.$$

$\Longrightarrow$ $\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon$, s.d. $\frac{M}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} < \epsilon$ □

Bemerkung 0.3.

1. Eine C^∞ Funktion muss nicht analytisch sein.
2. Ist $f \in C^n$ mit $f(n) \equiv 0$ auf D, dann ist f ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich $n-1$, da

$$f(x) = T_{n-1}(f,x,x_0) + \underbrace{R_n(x,x_0)}_{=0}.$$



(a) $f(x) = x^3$ (b) $f(x) = x^2$

Korrolar 0.4 (Lokale Extrema)**.** Sei $f \in C^n(D, \mathbb{R})$, $D = (a, b)$ und für $x_0 \in (a, b)$ gelte

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) \quad \text{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Dann gilt

1. Ist n gerade und $f^{(n)}(x_0) < 0$ bzw. $f^{(n)}(x_0) > 0$, dann ist x_0 ein lokales Maximum bzw. lokales Minimum von f.
2. Ist n ungerade, dann ist x_0 kein lokales Extremum von f (Sattelpunkt, Wendepunkt).

Beweis. Taylor Satz $\implies f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$ $f^{(n)}$ stetig in x_0, $f^{(n)} \neq 0$ in x_0 $\implies \exists \delta > 0$, s.d. $f^{(n)}(x) \neq 0$ für $x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ und hat das gleiche Vorzeichen wie $f^{(n)}(x_0)$.

1. n gerade $\implies (x - x_0)^n > 0$, falls $x \neq x_0$.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \underbrace{(x - x_0)^n}_{>0}.$$

$\implies f(x) > f(x_0)$, falls $f^{(n)}(\xi) > 0$, dann $f^{(n)}(x_0) > 0$. $f(x) < f(x_0)$, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$.

2. n ungerade, wechselt $(x - x_0)^n$ das Vorzeichen.

□

Korrolar 0.5. Sei $f \in C^2((a, b), \mathbb{R})$ und $x_0 \in (a, b)$. Dann folgt

(i) x_0 ist ein lokales Minimum von $f \implies f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \geq 0$

(ii) x_0 ist ein lokales Maximum von $f \implies f'(x_0) = 0, f''(x_0) \leq 0$.

Beweis. klar. □

Korrolar 0.6 (Hinreichende Optimalitätsbedingung)**.** Sei x_0 mit $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$. Dann ist x_0 ein lokales Minimum.

Beweis. trivial. □

0.1 Die Regeln von de l'Hospital

Ziel: Grenzwerte zu berechnen für $x \to \pm\infty$ oder $f(x) \to \pm\infty$. Grenzwerte vom Typ:

$$\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, \infty^{\infty}, \dots\right).$$

Lemma 0.7 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz)**.** Seien f, g im Intervall $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$. Dann $\exists$ ein $c \in (a, b)$ s.d. gilt

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Beweis. ohne Beweis. □

Satz 0.8 (1. Regel von de l'Hospital)**.** Seien $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $I := (a, b)$ und $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit

$$\lim_{x \nearrow b} f(x) = 0 = \lim_{x \nearrow b} g(x).$$

Es gelte $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I$ und $\lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c$. $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Dann gilt:

$$g(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \text{ und } \lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Analoge Aussagen gelten für $x \searrow a$.

Beweis. f, g in b stetig $\implies$ $f(b) = g(b) = 0$. $g'(x) \neq 0$ $\implies$ keine weiteren Nullstellen von g in (a, b), d.h. $g(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$.

Wir nutzen den verallgemeinerten Mittelwertsatz. $\implies$ $\exists \xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Aus $x \nearrow b$ folgt $\xi \nearrow b$ $\implies$ Behauptung. □

Beispiel 0.9.

1.
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

2.
$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\cos x}{2x} = +\infty$$

3.
$$\lim_{x \searrow 0} \frac{(\sin x)^2}{x^2} = \lim_{x \searrow 0} \frac{2 \sin(x) \cdot \cos(x)}{2x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{2(\cos^2 x - \sin^2(x)}{2} = 1.$$

Satz 0.10 (2. Regel von de l'Hospital)**.** Seien $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $I := (a, b)$ und $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\lim_{x \nearrow b} g(x) = \pm\infty$, $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I$.

$$\lim_{x \nearrow b} f(x) = \pm\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Dann gilt: $\exists x_0 \in I$ mit $g(x) \neq 0$ für $a < x_0 \leq x < b$ und

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Analoge Aussage für $x \searrow a$.

Beweis. Rannacher. $\square$

Bemerkung 0.11. 1. Grenzprozesse für $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Substitution $y = \frac{1}{x}$, ($y \to 0$ für $x \to \pm\infty$).

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{f(\frac{1}{y}}{g(\frac{1}{y})}.$$

2. $0 - \infty$

$$\lim_{x\nearrow b} f(x) = 0, \lim_{x\nearrow b} g(x) = \infty.$$

$$\lim_{x\nearrow b} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)^{-1}} \sim \frac{0}{0}.$$

3. $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to b} f(x) = \infty, \lim_{x\to b} g(x) = \infty.$$

$$\lim_{x\to b}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to b}\left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}}\right) = \lim_{x\to b} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}} \sim \frac{0}{0}.$$

4. $f(x) \to 1,\ g(x) \to \infty$
   $f(x) \to \infty,\ g(x) \to 0$
   $f(x) \to 0,\ g(x) \to 0$
   $\lim f(x)^{g(x)}$?

   Logarithmiere $f(x)^{g(x)} = A$.

$$\ln A = g(x) \cdot \ln f(x).$$

   $\lim A = \exp(\lim g(x) \cdot \ln(f(x)))$