Bemerkung 1 (Organisatorisches)**.** Nächsten Mittwoch (20. November) findet keine Vorlesung und auch keine Plenarübung statt. Aber Mittwoch (27.11.) Vorlesung statt Plenarübung im großen Hörsaal Chemie

Satz 1 (Wichtiger Satz)**.** Der Körper $\mathbb{R}$ ist vollständig, d.h. jede Cauchy Folge in $\mathbb{R}$ hat einen Limes

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge reeller Zahlen, d.h. $a_n \in \mathbb{R}$.

$$a_n \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : \exists \text{ C.F. } (a_{n,m}).$$

$$a_{n,m} \in \mathbb{Q} \forall n, m \in \mathbb{N}, a_n = \lim_{m\to\infty} a_{n,m}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ wähle Index $k_n \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_{n,kn}| < \frac{1}{n}.$$

k_n existiert, weil $\lim_{m\to\infty} a_{n,m} = a_n$ und damit $|a_n - a_{n,m}| \to 0$ also $\exists \epsilon |a_n - a_{n.m}| < \epsilon < \frac{1}{n}$ und Archimedisches Axiom.

Ziel: zu zeigen $(a_{n,k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen ist Cauchy Folge.

Sei $\epsilon > 0$. Dann $\exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n, m \geq n_\epsilon$:

$$|a_n - a_m| < \frac{1}{3}\epsilon, |a_n - a_{n,k_n}| < \frac{1}{3}\epsilon$$
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{C.F.}$$
$$|a_m - a_{m,k_m}| < \frac{1}{3}\epsilon(\text{AA}).$$

und folglich

$$|a_{n,k_n} - a_{m,k_m}| \leq |a_{n,k_n} - a_n + a_n - a_m + a_m - a_{m,k_m}| \leq |a_{n,k_n} - a_n| + |a_n - a_m| + |a_m - a_{m,k_m}| < \epsilon.$$

$\implies (a_{n,k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy Folge $\implies$ Nach Konstruktion der $\mathbb{R}$ folgt, dass $\exists$ „limes' $a \in \mathbb{R}$, s.d.

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\epsilon : |a_{n,k_n} - a| < \epsilon.$$

Dann gilt für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n,k_n}| + |a_{n,k_n} - a| \leq \frac{1}{n} + |a_{n,k_n} - a| \to 0.$$

$\implies a = \lim_{n\to\infty} a_n$

$\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$, d.h.

$$\forall a \in \mathbb{R} \text{ gilt } \forall \epsilon > 0 \exists q_\epsilon \in \mathbb{Q} \text{ s.d. } |a - q_\epsilon| \leq \epsilon.$$

Nach Konstruktion von $\mathbb{R}$ folgt:

$$\forall \text{C.F.} (a_n)_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{Q} :$$
$$\exists a \in \mathbb{R} : a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

$\implies \forall \epsilon > 0 \ \exists n_\epsilon \ |a_n - a| < \epsilon \forall n \geq n_\epsilon$ □

Bemerkung 2 (Archimedisches Axiom)**.**

$$\forall a \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : \text{s.d.} n - a > 0$$
$$\implies \forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \text{s.d. } n - \frac{1}{\epsilon} > 0$$
$$\implies \frac{1}{n} < \epsilon.$$

0.1 Wichtige Aussage

$\mathbb{R}$ ist vollständig, da alle C.F. in $\mathbb{R}$ haben einen Grenzwert in $\mathbb{R}$.

0.2 Weitere Möglichkeiten, die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zu charakterisieren

Definition 1 (Maximum, Minimum, obere/untere Schranke, Supremum, Infimum)**.** Sei $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset$.

Maximum:

$$\max M := b \in M : b \geq x, \forall x \in M.$$

Minimum:

$$\min M := a \in M : x \geq a, \forall x \in M.$$

Obere Schranke:

$$b \in \mathbb{R}, \text{ s.d. } b \geq x, \forall x \in M.$$

Untere Schranke:

$$a \in \mathbb{R}, \text{ s.d. } x \geq a, \forall x \in M.$$

Eine Menge M heißt nach oben (unten) beschränkt, falls eine obere (untere) Schranke von M existiert.

Supremum: kleinste obere Schranke

Infimum: größte untere Schranke

Beispiel 1.

- $\mathbb{N}$ ist von unten beschränkt, z.B. mit 0. $\min\mathbb{N} = 1$, von oben unbeschränkt.
- $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$: obere Schranke ist $\sqrt{2}$ und untere Schranke ist $-\sqrt{2}$, aber M besitzt kein Maximum bzw. Minimum. $\sqrt{2}$ ist Supremum und $-\sqrt{2}$ ist Infimum

Bemerkung 3. Falls $b = \sup M \iff$:

1. b ist eine obere Schranke von M, d.h. $\forall x \in M : x \leq b$ und
2. Jede Zahl $c < b$ ist keine obere Schranke von M, d.h. $\forall c \in M, c < b, \exists x \in M$: $c < x$ (oder $\forall \epsilon > 0 \exists x \in M : x > b - \epsilon$)

Analog für $a = \inf M$

Beispiel 2.

$$I = (a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

dann gilt $\sup I = b, \inf I = a$.

Bemerkung 4. Das Supremum (Infimum) muss nicht zur Menge M gehören, aber falls $\sup M \in M$, dann $\sup M = \max M$.

Satz 2 (Vollständigkeit in $\mathbb{R}$ Nr. 2)**.** $\mathbb{R}$ vollständig $\iff$ jede nichtleere beschränkte Teilmenge $M \in \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum bzw. Infimum

Definition 2 (Intervalle)**.**

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \text{ abgeschlossenes Intervall.}$$

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \text{ offenes Intervall.}$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \text{ halboffenes Interval.}$$

$$[a, b) \text{ analog.}$$

Definition 3 (Intervallschachtelung). ist eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $I_n := [a_n, b_n] := \{x \in \mathbb{R} \mid a_n \leq x \leq b_n\}, n \in \mathbb{N}$ mit Eigenschaften. 1) $I_{n+1} \subset I_n n \in \mathbb{N}$ (bedeutet $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ 2) $\forall \epsilon > 0, \exists I_n$ mit der Länge

$$|b_n - a_n| < \epsilon \text{ d.h. } |b_n - a_n| \to 0, n \to \infty.$$

Satz 3 (Vollständigkeit in $\mathbb{R}$ Nr. 3). Vollständigkeit in $\mathbb{R} \iff$ Intervallschachtelungseigenschaft d.h. für jede Intervallschachtelung.

$$(I_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}$$

so dass

$$c = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n := \{x \in \mathbb{R} | x \in I_n \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Diese Aussage ist verwandt mit dem Axiom vom Dedekindischen Schnitt

Satz 4 (Trennungseigenschaft). Seien $A, B \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ mit $a < b \forall a \in A, b \in B$

Dann existiert immer ein $c \in \mathbb{R}$, welches A und B trennt:

$$\forall a \in A, b \in B \text{ gilt } a \leq c \leq b.$$

Dies ist ebenfalls $\iff$ zur Vollständigkeit in $\mathbb{R}$

Lemma 1 (Existenz der k-ten Wurzel einer positiven reellen Zahl). $\forall a \in \mathbb{R}^+ \ \forall k \in \mathbb{N}$: existiert eine positive k-te Wurzel. Das heißt die Lösung der Gleichung

$$x^k = a.$$

ist $\sqrt[k]{a}$ (Bezeichnung).

Beweis. 1) Die Eindeutigkeit der $\sqrt[k]{a}$ (falls sie existiert)

Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ zwei k-te Wurzeln des $a \in R^+$:

$$x_1^k = a = x_2^k.$$

Dann gilt:

$$0 = x_1^k - x_2^k = (x_1 - x_2) \underbrace{\sum_{m=0}^{k-1} x_1^{k-1-m} x_2^m}_{>0}.$$

mit dieser Hilfsformel

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k.$$

$\implies x_1 - x_2 = 0 \implies x_1 = x_2$

2) Existenz: $a = 1 \implies \sqrt[k]{1} = 1$ ($1^k = 1$) Sei $a > 1$ und Annahme, dass $\exists$ Wurzel für $0 < a' < 1$ Dann definiere:

$$\sqrt[k]{a} := \frac{1}{\sqrt[k]{\frac{1}{a}}}.$$

$$(\sqrt[k]{a})^k = \left(\frac{1}{\sqrt[k]{a'}}\right)^k = \frac{1}{\sqrt[k]{a'}^k} = \frac{1}{a'} = a.$$

Es bleibt zu zeigen: $\exists \sqrt[k]{a}$ für $0 < a < 1$. □