1 Grundlagen

1.1 Organisatorisches

1. Freitag 1.11. Feiertag
2. Abgabe Donnerstag davor

Lemma 1. Für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $0 < k < n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-1-(k-1)+1)}{(k-1)!} + \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-1-k+1)}{(k-1)!k} \\
&= \frac{(n-1)\dots(n-k+1)(k+n-k}{k!} \\
&= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1. Mit Hilfe der Rekursionsformel

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

bzw

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

berechnet man die Binomialkoeffizienten explizit, auch bekannt als „Pascalsches Dreieck".

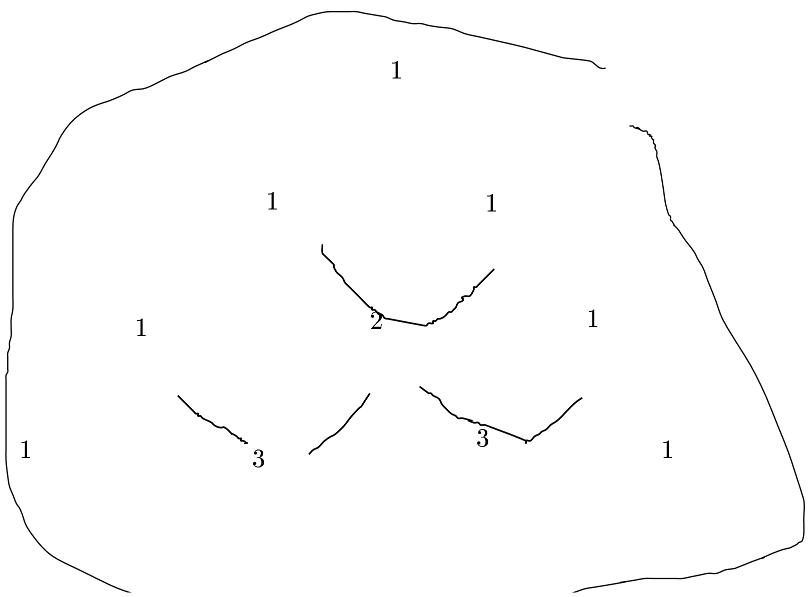

Abbildung 1: Pascalsches Dreieck

Satz 1 (Binomische Formel)**.** Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

bzw.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Beweis durch Induktion. Induktionsanfang $n = 1$:

$$a + b = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b = 1a + 1b.$$

Annahme: Die Formel gilt für ein $n \geq 1$

Induktionsschritt: $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\left(\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n\right) \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n}{1}a^n b + \ldots + \binom{n}{n-1}a^2b^{n-1} + \binom{n}{n}ab^n \\
&+ \binom{n}{0}a^n b + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \ldots + \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}.
\end{aligned}$$

□

1.2 Grundlegendes über Zahlenmengen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \text{ natürliche Zahlen.}$$

auf $\mathbb{N}$ sind die arithmetischen Operationen „+” (Addition) und „·” (Multiplikation) definiert. Für diese gelten u.a. die Regeln:

$$n + m = m + n \text{ bzw. } n \cdot m = m \cdot n \text{ Kommutativität}$$
$$(n+m)+k = n+(m+k) \text{ bzw. } (n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k) \text{ Assoziativität}$$
$$(n+m) \cdot k = n \cdot k + m \cdot k \text{ Distributivität}$$

Subtraktion und Division sind nicht für alle Paare der natürlichen Zahlen definiert ($1-2 \notin \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$), d.h. die natürlichen Zahlen sind bezüglich der Subtraktion und Division „unvollständig”. Dies bedeutet, dass für $n, m \in \mathbb{N}$ z.B.: die Gleichung

$$n + x = m$$

nicht immer lösbar ist.

Deshalb werden die natürlichen Zahlen zu den ganzen Zahlen erweitert.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \text{ ganze Zahlen.}$$

In $\mathbb{Z}$ hat die Gleichung $n + x = m$ die (eindeutige) Lösung: $x = m - n \in \mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z}$ ist vollständig bezüglich der Subtraktion aber unvollständig bezüglich der Division, d.h. für beliebige $b, y \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, die „lineare” Gleichung $b \cdot x = y$ nicht immer durch ein $x \in \mathbb{Z}$ lösbar ist.

Diese Beschränkung wird durch die Einführung der rationalen Zahlen behoben:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{r}{s} \mid r \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{N}\right\}.$$

Die Menge $\mathbb{Q}$ ist vollständig bezüglich der vier elementaren arithmetischen Operationen (bis auf die unzulässige Division durch Null).

$$a = \frac{r}{s}, b = \frac{u}{v} \in \mathbb{Q} = \begin{cases} a + b = \frac{r}{s} + \frac{u}{v} & := \frac{r \cdot v + u \cdot s}{s \cdot v} \\ a - b & := \frac{r \cdot v - u \cdot s}{s \cdot v} \\ a \cdot b & := \frac{r \cdot u}{s \cdot v} \\ \frac{a}{b} & := \frac{r \cdot v}{s \cdot u} \end{cases}.$$

$\mathbb{Q}$ bildet mit der Operation „+" und „-" einen „Körper" bildet.

1.3 Was ist ein Körper?

Sei K eine Menge mit Operationen „+" und „·".

Operation „+" erfüllt die Axiome der Addition

1. Kommutativität $\forall a, b \in K : a + b = b + a$
2. Assoziativität $\forall a, b, c \in K : (a + b) + c = a + (b + c)$
3. Neutrales Element $\exists 0 \in K : \forall a \in K : a + 0 = a$
4. Additives Inverses $\forall a \in K : \exists - a \in K : a + (-a) = 0$

Operation „·" erfüllt Axiome der Multiplikation

1. Kommutativität $\forall a, b \in K : a \cdot b = b \cdot a$
2. Assoziativität $\forall a, b, c \in K : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. Neutrales Element $\exists 1 \in K \setminus \{0\} =: K^* : \forall a \in K : a \cdot 1 = a$
4. Additives Inverses $\forall a \in K : \exists a^{-1} \in K : a \cdot a^{-1} = 1$

Zusätzlich gilt „+" und „·" erfüllen die Distributivität (D):

$$\forall a, b, c \in K : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Definition 1 (Körper)**.** Eine Menge K mit Operationen „+" und „· " (K, +, ·) die Axiome A1-A4, M1-M4 und D erfüllt, heißt Körper.

Beispiel 1. ($\mathbb{Q}$, +, ·) ist ein Körper
($\mathbb{Z}$, +, ·) ist kein Körper

Definition 2 (Angeordneter Körper)**.** Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Es $\exists p \subset K$ eine Teilmenge, die Axiome erfüllt:

1. $\forall \in K$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:
   (a) $a \in P$
   (b) $a = 0$
   (c) $-a \in P$
2. Aus $a > 0$ und auch $b > 0$ folgt: $a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$

Dann heißt $(K, +, \cdot, >)$ angeordneter Körper.