

Aufgabe	A1	A2	Σ
Punkte			

Aufgabe 1. Beh.: $\mathcal{A}_\mu$ ist eine σ -Algebra auf X .

Beweis. (i) $X \in \mathcal{A}_\mu$, denn $\mu(\emptyset) = 0$, da μ Maß und $X \Delta X = \emptyset$. Mit (ii) ist auch $\emptyset = X^C \in \mathcal{A}_\mu$.

(ii) Sei $A \in \mathcal{A}_\mu$. Dann ex. $B, C \in \mathcal{A}$ mit $\mu(C) = 0$ und $A \Delta B \subset C$. Dann ist

$$A^c \Delta \underbrace{B^c}_{\in \mathcal{A}} = A^c \setminus B^c \cup B^c \setminus A^c = B \setminus A \cup A \setminus B = A \Delta B \subset C.$$

Also $A^c \in \mathcal{A}_\mu$.

(iii) Sei $A_i \in \mathcal{A}_\mu$ für $i \in \mathbb{N}$. Dann ex. $\forall i \in \mathbb{N}$ ein $B_i \in \mathcal{A}$ und μ -Nullmenge $C_i \in \mathcal{A}$, s.d. $A_i \Delta B_i \subset C_i$.

Betrachte nun $B := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ und $C := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$. Es ist $B, C \in \mathcal{A}$ da $\mathcal{A}$ σ -Algebra. Außerdem ist $\mu(C) = 0$, wg. σ -Additivität von μ . Damit folgt

$$\begin{aligned} A \Delta B &= \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) \Delta \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \right) \\ &= \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \right) \cup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) \\ &\subset \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \setminus B_i \right) \cup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \setminus A_i \right) \\ &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \setminus B_i \cup B_i \setminus A_i) \\ &\subset C_i \\ &= C. \end{aligned}$$

□

Beh.: $\bar{\mu}$ ist ein Maß.

Beweis. (i) Z.z.: $\bar{\mu}$ wohldefiniert. Sei dazu $A \in \mathcal{A}_\mu$ und $B, B', C, C' \in \mathcal{A}$, s.d. $A \Delta B \subset C$ und $A \Delta B' \subset C'$. Definiere $\tilde{C} := C \cup C' \in \mathcal{A}$. Es folgt direkt $\mu(\tilde{C}) = 0$. Es gilt weiter

$$\begin{aligned} \tilde{C} &\supset \underbrace{(A \Delta B)}_{\subset C} \Delta \underbrace{(A \Delta B')}_{\subset C'} = \underbrace{A \Delta A}_{=\emptyset} \Delta B \Delta B' \\ &= B \Delta B' \\ &= B \setminus B' \cup B' \setminus B. \end{aligned}$$

Also insbesondere $B \setminus B' \subset \tilde{C}$ und $B' \setminus B \subset \tilde{C}$. Mit $B = (B \setminus B') \cup (B \cap B')$ disjunkt und der σ -Additivität von μ folgt

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu(\underbrace{B \setminus B'}_{\subset \tilde{C}}) + \mu(B \cap B') \\ &= 0 + \mu(B \cap B') + 0 \\ &= \mu(B \cap B') + \mu(\underbrace{B' \setminus B}_{\subset \tilde{C}}) \\ &= \mu(B'). \end{aligned}$$

Also $\bar{\mu}$ wohldefiniert.

- (ii) Z.z.: $\bar{\mu}(\emptyset) = 0$. Es ist $\emptyset \triangle \emptyset = \emptyset$, also $\bar{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.
- (iii) Die σ -Additivität folgt direkt aus der σ -Additivität von μ .

□

Aufgabe 2.