Aufgabe	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1. (a) Beh.: Mit $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ und $\varphi = \sqrt{x}$ ist ρ keine Norm.

Beweis. Aus dem letzten Zettel, folgt, dass $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist. Es ist außerdem $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$d(x,y) = \sqrt{|x-y|} = \sqrt{\|x-y\|_2} = \varphi(\|x-y\|_2) = \rho(x-y).$$

Dann ist

$$\rho(4 \cdot 4) = \sqrt{\|16\|_2} = 4 \neq 8 = 4 \cdot 2 = 4 \cdot \rho(4).$$

□

(b) Beh.: Teilmenge $O \subseteq \mathbb{K}^n$ g.d. offen, wenn sie keinen ihrer Randpunkte enthält.

Beweis. „$\implies$“: Sei $O \subseteq \mathbb{K}^n$ offen und $a \in \mathbb{K}^n$ ein Randpunkt von O. Ang.: $a \in O \implies \exists \epsilon > 0$ mit $K_\epsilon(a) \subseteq O$. Also existiert eine Umgebung von a, die ganz in O liegt ↯.

„$\impliedby$“: Sei $O \subseteq \mathbb{K}^n$ nicht offen. Dann ex. $a \in O$, s.d. $\forall \epsilon > 0$ gilt: $\exists y \in \mathbb{K}^n \setminus O$ mit $y \in K_\epsilon(a)$. Da außerdem $a \in O$, ist a Randpunkt von O, der in O liegt. □

(c) Beh.: ∂M von $M \subseteq \mathbb{K}^n$ ist abgeschlossen.

Beweis. Sei $M \subseteq \mathbb{K}^n$. Dann folgt nach VL: ∂M abgeschlossen. □

(d) Beh.: Die Aussage ist falsch.

Beweis. Für $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}$ und $M := [0,1]$ gilt $\partial M = \{0,1\}$. Damit folgt

$$\left(\overline{M}\right)^\circ = (\overline{[0,1]})^\circ = ([0,1])^\circ = (0,1) \neq [0,1] = \overline{((0,1))} = \overline{([0,1]^\circ)} = \overline{(M^\circ)}.$$

□

Aufgabe 2. (a) Beh.: $\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$, $\overline{M} = \partial M$ und $M^\circ = \emptyset$.

Beweis. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$, folgt $\forall a \in K_1(0)$, liegen in jeder Umgebung von a Punkte aus $K_1(0) \cap \mathbb{Q}^n = M$ und Punkte aus $K_1(0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n) \subseteq M^C$.

Außerdem sind alle Punkte der Einheitssphäre Randpunkte, damit folgt

$$\partial M = K_1(0) \cup \{x \in R^n \mid \|x\|_\infty = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \leq 1\}.$$

Da $M \subseteq \partial M$, folgt daraus

$$\overline{M} = M \cup \partial M = \partial M$$
$$M^\circ = M \setminus \partial M = \emptyset.$$

□

(b) Beh.: $\partial M = M$, $M^\circ = \emptyset$, $\overline{M} = M$.

Beweis. Es gilt $\forall a \in M$, dass $\forall \epsilon > 0$ Punkte $x \in M^C$ existieren mit $x_1 \neq 0$ und $\|a - x\|_2 < \epsilon$. Außerdem gilt für alle Randpunkte $a \in \partial M$, $a_1 = 0$, denn angenommen, $a_1 = \delta \neq 0$. Dann ist $K_{\frac{\delta}{2}}(a) \cap M = \emptyset$. Weiter gilt $\|x\|_2 \leq 1$, denn angenommen, $\exists \delta > 0$, s.d. $\|x\|_2 = 1 + \delta > 1$, dann folgt analog $K_{\frac{\delta}{2}}(a) \cap M = \emptyset$.

Damit folgt

$$\overline{M} = M \cup \partial M = M \cup M = M$$
$$M^\circ = M \setminus \partial M = M \setminus M = \emptyset.$$

□

(c) Beh.: $\partial M = \{-1,1\}^n$, $\overline{M} = M$, $M^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin [-1,1]^n\}$

Beweis. Es ist

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin (-1,1)^n\}.$$

Als Randpunkte ergeben sich damit durch komponentenweise Anwendung des eindimensionalen Falls:

$$\partial M = \{-1,1\}^n.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} M^\circ &= M \setminus \partial M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin [-1,1]^n\} \\ \overline{M} &= M \cup \partial M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin (-1,1)^n\} = M. \end{aligned}$$

□

(d) Beh.: $\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 1\}$, $M^\circ = M$, $M = [-1,1]^n$.

Beweis. Es ist

$$g(x) = \frac{3}{2} - f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in (-1,1)^n \\ \frac{3}{2} & \text{sonst} \end{cases}.$$

Also folgt

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in (-1,1)^n\} = (-1,1)^n.$$

Analog zu (c) folgt damit direkt

$$\begin{aligned} \partial M &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in \{-1,1\}^n\} \\ M^\circ &= (-1,1)^n \setminus \{-1,1\}^n = (-1,1)^n = M \\ \overline{M} &= (-1,1)^n \cup \{-1,1\}^n = [-1,1]^n. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3. Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $\tilde{V}$, V wie gegeben.

(a) Beh.: $(\cdot,\cdot)$ ist kein Skalarprodukt auf $\tilde{V}$.

Beweis. Für $a = 0$, $b = 1$ und $f = 1 \in \tilde{V}$, folgt $f' = 0$ und $f \neq 0$, aber

$$(f,f) = \int_0^1 f'(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

Damit ist (S1) nicht erfüllt. □

(b) Beh.: $(\cdot,\cdot)$ ist ein Skalarprodukt auf V.

Beweis. Seien $f, g \in V$ beliebig.

Zunächst ist (f,g) wohldefiniert, da f und g stückweise stetig differenzierbar, sind f' und g' stückweise stetig, also stückweise R.-integrierbar.

(S1) Wegen der Monotonie des R.-Integrals ist

$$(f,f) = \int_a^b \underbrace{(f'(x))^2}_{\geq 0}\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Sei nun

$$(f,f) = \int_a^b f'(x)^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

Wegen $f \in \tilde{V}$, ex. eine Zerlegung Δ von $[a,b]$, s.d.

$$(f,f) = \sum_{[\tilde{a},\tilde{b}] \in \Delta} \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \underbrace{f'(x)^2}_{\geq 0}\,\mathrm{d}x.$$

Da die einzelnen Summanden alle nicht negativ sind, folgt $\forall [\tilde{a}, \tilde{b}] \in \Delta$ mit der Definitheit des R.-Integrals:

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \underbrace{f'(x)^2}_{\geq 0} \,\mathrm{d}x = 0 \quad \overset{f' \text{ stetig auf } [\tilde{a}, \tilde{b}]}{\Longrightarrow} \quad f'(x)^2 = 0 \quad \forall x \in [\tilde{a}, \tilde{b}].$$

Da dies für alle Teilintervalle gilt, folgt

$$f'(x)^2 = 0 \quad \forall x \in [a,b] \implies f' \equiv 0 \implies \exists h \in \mathbb{R} : f(x) = h.$$

Wegen $f(a) = f(b) = 0 \implies f(a) = h = 0 \implies h = 0$. Also $f \equiv 0$.

(S2) Folgt aus der Symmetrie des R.-Integrals.

(S3) Folgt aus der Linearität des R.-Integrals und der Linearität der Ableitung.

□

Aufgabe 4. Mit Gram-Schmidt-Verfahren folgt

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{(1,1)}} = \frac{1}{\int_0^1 1 \,\mathrm{d}t} = 1$$

$$\widetilde{b_2} = t - (1,t) = t - \int_0^1 t \,\mathrm{d}t = t - \frac{1}{2}$$

Es ist weiter

$$(\widetilde{b_2}, \widetilde{b_2}) = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)\left(t - \frac{1}{2}\right) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}$$

$$b_2 = \sqrt{12}\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

Damit folgt

$$\widetilde{b_3} = t^2 - (t, t^2) - 12\left(t - \frac{1}{2}, t^2\right) t = t^2 - t + \frac{1}{6}$$

$$(\widetilde{b_3}, \widetilde{b_3}) = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{180}$$

$$b_3 = \sqrt{180}\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)$$

$$\widetilde{b_4} = t^3 - (1, t^3) - 12\left(t - \frac{1}{2}, t^3\right)\left(t - \frac{1}{2}\right) - 180\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)\left(t^2 - 1 + \frac{1}{6}\right)$$

$$= t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{5}t - \frac{1}{20}$$

$$(\widetilde{b_4}, \widetilde{b_4}) = \int_0^1 \left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{5}t - \frac{1}{20}\right)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2800}$$

$$b_4 = \sqrt{2800}\left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{5}t - \frac{1}{20}\right)$$

Also ist

$$\mathcal{B} = \left\{1, \sqrt{12}\left(t - \frac{1}{2}\right), \sqrt{180}\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right), \sqrt{2800}\left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{5}t - \frac{1}{20}\right)\right\}.$$

eine Orthonormalbasis auf $C([0,1])$ mit dem gegebenen Skalarprodukt.