Aufgabe	A26	A27	$\sum$
Punkte			

Aufgabe 26. Sei R ein Ring, M und N zwei R-Moduln und $\varphi\colon M \to N$ ein R-Modulhom. Sei $\iota\colon \ker\varphi \to M$ die kanonische Inklusion.

Beh.: Zu jedem R-Modul U und jedem R-Modulhomomorphismus $f\colon U \to M$ mit $\varphi \circ f = 0$ gibt es einen eindeutig bestimmten R-Modulhomomorphismus $g\colon U \to \ker\varphi$ mit $f = \iota \circ g$.

Beweis. (i) Existenz: Definiere

$$\begin{aligned} g\colon U &\to \ker\varphi \\ u &\mapsto f(u). \end{aligned}$$

g ist wohldefiniert, da $\varphi \circ f = 0$, also $\mathrm{Bild}(f) \subseteq \ker\varphi$. Da f R-Modulhom., ist auch g R-Modulhom.

Dazu sei weiter $u \in U$ beliebig. Dann ist $f(u) = g(u) = \iota(g(u))$, also $f = \iota \circ g$.

(ii) Eindeutigkeit: Seien g, $g'\colon U \to \ker\varphi$ R-Modulhom.s mit $f = \iota \circ g = \iota \circ g'$. Dann gilt $\forall u \in U$: $g'(u) = \iota(g'(u)) = f(u) = \iota(g(u)) = g(u)$. Also folgt $g = g'$.

□

Aufgabe 27. Seien R ein Ring und $(M_i)_{i\in I}$ Familie von freien R-Moduln. Sei $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$. Sei weiter $(x_{i,j})_{j\in J_i}$ eine Basis von M_i und

$$K := \bigcup_{i\in I} (\{i\} \times J_i)\,.$$

Betrachte $(x_{i,j})_{(i,j)\in K}$ via der kanonischen Inklusionen $q_i\colon M_i \to M$ als Familie von Elementen von M. Sei N ein Modul mit Familie von Elementen $(y_{i,j})_{(i,j)\in K}$ aus N.

(a) Beh.: $\forall i \in I$ gibt es einen eindeutigen R-Modulhomomorphismus $f_i\colon M_i \to N$ mit $f_i(x_{i,j}) = y_{i,j}$ $\forall j \in J_i$.

Beweis. Sei $i \in I$ beliebig. Nach Vorr. ist M_i frei mit Basis $(x_{i,j})_{j\in J_i}$. Also erfüllt nach VL $(M_i, (x_{i,j})_{j\in J_i})$ die Eigenschaft (UF). Damit folgt, angewendet auf N und die Familie $(y_{i,j})_{(i,j)\in K}$ die Behauptung. □

(b) Beh.: M ist frei.

Beweis. Nach VL g.z.z., dass $(M, (x_{i,j})_{(i,j)\in K})$ die Eigenschaft (UF) erfüllt, also dass genau ein R-Modulhom. $f\colon M \to N$ existiert mit $f(x_{i,j}) = y_{i,j}$ $\forall (i,j) \in K$.

Da M direkte Summe der M_i ist, erfüllt M die Eigenschaft (US). Wende diese auf N mit den Homomorphismen $f_i\colon M_i \to N$ aus (a) an. Damit folgt es ex. genau ein $f\colon M \to N$ mit $f_i = f \circ q_i$ $\forall i \in I$. Wegen (a) gilt $\forall (i,j) \in K$ $f_i(x_{i,j}) = y_{i,j}$ $(*)$.

Z.z.: $\forall i \in I$ $f_i = f \circ q_i \iff f(x_{i,j}) = y_{i,j}$ $\forall (i,j) \in K$.

- „$\Longrightarrow$“: Sei $(i,j) \in K$ beliebig.

$$f(x_{i,j}) = f(q_i(x_{i,j})) \overset{\text{Vorr.}}{=} f_i(x_{i,j}) \overset{(*)}{=} y_{i,j}.$$

- „ $\Longleftarrow$ “: Sei $m \in M_i$ beliebig. Da M_i frei mit Basis $(x_{i,j})_{j \in J_i}$ ex. $(r_j)_{j \in J} \in R^{(J)}$ mit $m = \sum_{j \in J_i} r_j x_{i,j}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
f_i(m) &= f_i\left(\sum_{j \in J_i} r_j x_{i,j}\right) \\
&\overset{f_i\ R\text{-Modulhom.}}{=} \sum_{j \in J_i} r_j f_i(x_{i,j}) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{j \in J_i} r_j y_{i,j} \\
&\overset{\text{Vorr.}}{=} \sum_{j \in J_i} r_j f(x_{i,j}) \\
&= f\left(\sum_{i \in J_i} r_j x_{i,j}\right) \\
&= f(m).
\end{aligned}$$

Aufgrund der Eindeutigkeit von f mit der Eigenschaft $f_i = f \circ q_i \ \forall i \in I$ und der gezeigten Äquivalenz, folgt die Existenz und Eindeutigkeit von f mit der Eigenschaft $f(x_{i,j}) = y_{i,j} \ \forall (i,j) \in K$, also (UF). $\square$