

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	Σ
Punkte					

Aufgabe 1. Seien R ein Ring, M und N zwei R -Moduln und $f: M \rightarrow N$ R -Modulhom. Beh.: Folgende Aussagen sind äquivalent

- (i) f ist R -Mod.iso
- (ii) Für alle R -Moduln L ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(L, M) &\rightarrow \text{Hom}_R(L, N) \\ g &\mapsto f \circ g. \end{aligned}$$

bijektiv.

Beweis. • (i) $\implies$ (ii): φ bezeichne die gegebene Abbildung. Sei f R -Mod.iso. und $g_1, g_2 \in \text{Hom}_R(L, M)$ mit $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$. Da f Iso. ex. ein $f^{-1}: N \rightarrow M$. Damit folgt

$$\varphi(g_1) = \varphi(g_2) \implies f \circ g_1 = f \circ g_2 \implies f^{-1} \circ f \circ g_1 = f^{-1} \circ f \circ g_2 \implies g_1 = g_2.$$

Also φ injektiv.

Sei nun $h \in \text{Hom}_R(L, N)$ beliebig. Wähle $g = f^{-1} \circ h$. Damit folgt

$$\varphi(g) = \varphi(f^{-1} \circ h) = f \circ f^{-1} \circ h = h.$$

Also φ surjektiv und damit bijektiv.

- (ii) $\implies$ (i): Mit $L = N$ folgt $\varphi: \text{Hom}_R(N, M) \rightarrow \text{Hom}_R(N, N)$ bijektiv. Also ex. φ^{-1} . Definiere $h := \varphi^{-1}(\text{id}_N)$. Damit folgt $\varphi(h) = f \circ h = \text{id}_N$.

Setze nun $L = M$. Dann folgt $\psi: \text{Hom}_R(M, M) \rightarrow \text{Hom}_R(M, N)$ bijektiv. Es ist dann $\psi(\text{id}_M) = f \circ \text{id}_M = f$. Damit folgt

$$\psi(h \circ f) = \underbrace{f \circ h}_{\text{id}_N} \circ f = f = \psi(\text{id}_M).$$

Da ψ injektiv, folgt $h \circ f = \text{id}_M$.

Insgesamt folgt mit $f^{-1} := h$, f bijektiv und damit Iso.

□

Aufgabe 2. (a) Beh.: $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = 0$.

Beweis. Es ist nach VL:

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}/(2\mathbb{Z})\mathbb{Q}.$$

Aber $(2\mathbb{Z})\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$, denn $(2\mathbb{Z})\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$ klar und $\mathbb{Q} \subseteq (2\mathbb{Z})\mathbb{Q}$, denn für $q \in \mathbb{Q}$ ist $q = 2 \cdot \frac{1}{2}q \in (2\mathbb{Z})\mathbb{Q}$. Also $\mathbb{Q}/(2\mathbb{Z})\mathbb{Q} = 0$. Damit folgt die Beh. □

(b) Beh.: $2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Beweis. Es ist nach VL:

$$2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} 2\mathbb{Z} \cong 2\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}2\mathbb{Z})$$

Es ist $2\mathbb{Z}2\mathbb{Z} = (4) = 4\mathbb{Z}$ also $2\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}2\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Weiter ist $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, denn

$$\#\{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\} = \#\{\dots, 0 + 4\mathbb{Z}, 2 + 4\mathbb{Z}, \underbrace{4 + 4\mathbb{Z}}_{0+4\mathbb{Z}}, \dots\} = 2 = \#\{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}.$$

□

- (c) Beh.: $2 \otimes 1 = 0$ in $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, aber $2 \otimes 1 \neq 0$ in $2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Beweis. Es ist $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ni 2 \otimes \bar{1} = (2 \cdot 1) \otimes \bar{1} = 1 \otimes (2 \cdot \bar{1}) = 1 \otimes \bar{0} = 0$.

Definiere $\beta: 2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $(a, \bar{b}) \mapsto \overline{\frac{a}{2}b}$. β ist wohldefiniert, da $\forall a \in 2\mathbb{Z}$ ist $\frac{a}{2} \in \mathbb{Z}$. Außerdem β bilinear. Wende (UT) auf $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ auf β an. Erhalte einen $\mathbb{Z}$ -Mod.hom $f: 2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit $f \circ \tau = \beta$. Ang.: $2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ni 2 \otimes \bar{1} = 0$. Dann folgt

$$f(\tau(2, \bar{1})) = f(2 \otimes \bar{1}) = f(0) = \bar{0} \neq \bar{1} = \beta(2, \bar{1}) \quad \nabla.$$

Also $2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ni 2 \otimes \bar{1} \neq 0$. □

Aufgabe 3. Sei R ein Ring, $I \subseteq R$ Ideal und M R -Modul.

- (a) Beh.: Es gibt einen eindeutigen surjektiven R -Mod.hom. $f: I \otimes_R M \rightarrow IM$ mit $f(a \otimes m) = am$ für $a \in I, m \in M$.

Beweis. Definiere $\beta: I \times M \rightarrow IM$, $(a, m) \mapsto am$. β bilinear. Mit (UT) angewendet auf IM und β , existiert genau ein R -Mod.hom. $f: I \otimes_R M \rightarrow IM$ mit $f \circ \tau = \beta$. Damit folgt für $a \in I, m \in M$:

$$f(a \otimes m) = f(\tau(a, m)) = \beta(a, m) = am.$$

Sei nun $m \in IM$ beliebig. Dann ex. $a_i \in I, m_i \in M$ mit

$$\begin{aligned} m &= \sum_{i=1}^n a_i m_i \\ &= \sum_{i=1}^n f(a_i \otimes m_i) \\ &\stackrel{f \text{ } R\text{-Hom.}}{=} f\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n a_i \otimes m_i}_{:= \xi \in I \otimes_R M}\right) \\ &= f(\xi). \end{aligned}$$

Also f surjektiv. □

- (b) Beh.: f aus Teil (a) ist i.A. nicht injektiv.

Beweis. Mit $R = \mathbb{Z}$, $I = 2\mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ folgt

$$f: 2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0,$$

aber mit 29(b) ist $2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \neq 0$. Damit ist f nicht injektiv. □

Aufgabe 4. Sei K Kp, V e.d. K -VR. und $f, g \in \text{End}_K(V)$. Seien $\lambda \in K$ EW von f und $\mu \in K$ EW von g .

- (a) Beh.: Für $v, w \in V \setminus \{0\}$ gilt $v \otimes w \neq 0$ in $V \otimes_K V$.

Beweis. Seien $v, w \in V \setminus \{0\}$. Da V VR. und $v \neq 0 \neq w$, ergänze v zu Basis $(v_i)_{i \in I}$ und w zu Basis $(w_i)_{i \in I}$ mit $v = v_1$ und $w = w_1$. Dann definiere

$$\begin{aligned} \beta: V \times V &\rightarrow K \\ (x, y) &= \left(\sum_{i \in I} \alpha_i v_i, \sum_{i \in I} \beta_i w_i \right) \mapsto \sum_{i \in I} \alpha_i \cdot \sum_{i \in I} \beta_i. \end{aligned}$$

Da $(v_i)_{i \in I}$ und $(w_i)_{i \in I}$ Basen, sind die Darstellungen eindeutig und damit β wohldefiniert. Außerdem β bilinear, denn $\forall x, y, z \in V$ und $\lambda \in K$ gilt

$$\begin{aligned}\beta(\lambda x + y, z) &= \beta\left(\sum_{i \in I} (\lambda \alpha_i + \beta_i) v_i, \sum_{i \in I} \gamma_i w_i\right) \\ &= \sum_{i \in I} (\lambda \alpha_i + \beta_i) \cdot \sum_{i \in I} \gamma_i \\ &= \lambda \sum_{i \in I} \alpha_i \sum_{i \in I} \gamma_i + \sum_{i \in I} \beta_i \sum_{i \in I} \gamma_i \\ &= \lambda \beta(x, z) + \beta(y, z).\end{aligned}$$

Für zweites Argument analog. Weiter ist $v = 1 \cdot v_1$ und $w = 1 \cdot w_1$, also $\beta(v, w) = 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$. Mit (UT) angewendet auf β und K , existiert ein R -Mod.hom. $f: V \otimes_K V \rightarrow K$. mit $f \circ \tau = \beta$. Ang.: $v \otimes w = 0$. Dann ist $f(\tau(v \otimes w)) = f(v \otimes w) = f(0) = 0 \neq 1 = \beta(v, w)$. Also $v \otimes w \neq 0$. $\square$

(b) Beh.: $\lambda\mu$ ist EW von $f \otimes g \in \text{End}_K(V \otimes_K V)$.

Beweis. Sei v EV von f bezügl. λ und w EV von g bezügl. μ . Dann gilt

$$\begin{aligned}(f \otimes g)(v \otimes w) &= f(v) \otimes g(w) \\ &= \lambda v \otimes \mu w \\ &= \lambda\mu(v \otimes w).\end{aligned}$$

Da v, w EV sind $v \neq 0 \neq w$, also wegen (a) auch $v \otimes w \neq 0$ und damit EV von $f \otimes g$ zu $\lambda\mu$. Also insbes. $\lambda\mu$ EW von $f \otimes g$. $\square$

(c) Beh.: $\lambda + \mu$ ist EW von $f \otimes \text{id}_V + \text{id}_V \otimes g \in \text{End}_K(V \otimes_K V)$.

Beweis. Sei v EV von f bezügl. λ und w EV von g bezügl. μ . Dann gilt

$$\begin{aligned}(f \otimes \text{id}_V + \text{id}_V \otimes g)(v \otimes w) &= (f \otimes \text{id}_V)(v \otimes w) + (\text{id}_V \otimes g)(v \otimes w) \\ &= f(v) \otimes \text{id}_V(w) + \text{id}_V(v) \otimes g(w) \\ &= \lambda v \otimes w + v \otimes \mu w \\ &= (\lambda + \mu)(v \otimes w).\end{aligned}$$

Da v, w EV sind $v \neq 0 \neq w$, also wegen (a) auch $v \otimes w \neq 0$ und damit EV von $f \otimes \text{id}_V + \text{id}_V \otimes g$ zu $\lambda + \mu$. Also insbes. $\lambda + \mu$ EW von $f \otimes \text{id}_V + \text{id}_V \otimes g$. $\square$