

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	Σ
Punkte					

Aufgabe 1. Die relativen Konditionszahlen sind gegeben durch

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \frac{x_j}{F_i(x)}.$$

- $F(x, y) = x \cdot y$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x.$$

Damit folgt

$$k_{11} = y \cdot \frac{x}{x \cdot y} = 1 \quad k_{12} = x \cdot \frac{y}{x \cdot y} = 1.$$

Die Multiplikation ist also gut konditioniert.

- $F(x, y) = \frac{x}{y}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

Damit folgt

$$k_{11} = \frac{1}{y} \cdot \frac{x}{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y} \frac{y}{x} = 1 \quad k_{12} = -\frac{x}{y^2} \cdot \frac{y}{\frac{x}{y}} = -\frac{x}{y^2} \frac{y^2}{x} = -1.$$

Die Division ist also auch gut konditioniert.

- $F(x) = \sqrt{x}$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Damit folgt

$$k_{11} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}.$$

Wurzelziehen ist also ebenfalls gut konditioniert.

Aufgabe 2. • Sei $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} f(h) &= (ph^2 + h^2)^2 - p^2 h^4 \\ &= h^2 (2ph + 1) \end{aligned}$$

Es ist $2ph + 1 \leq 2p + 1$ für $h \leq 1$. Also folgt mit $c = 2p + 1$

$$f(h) = \mathcal{O}(h^2).$$

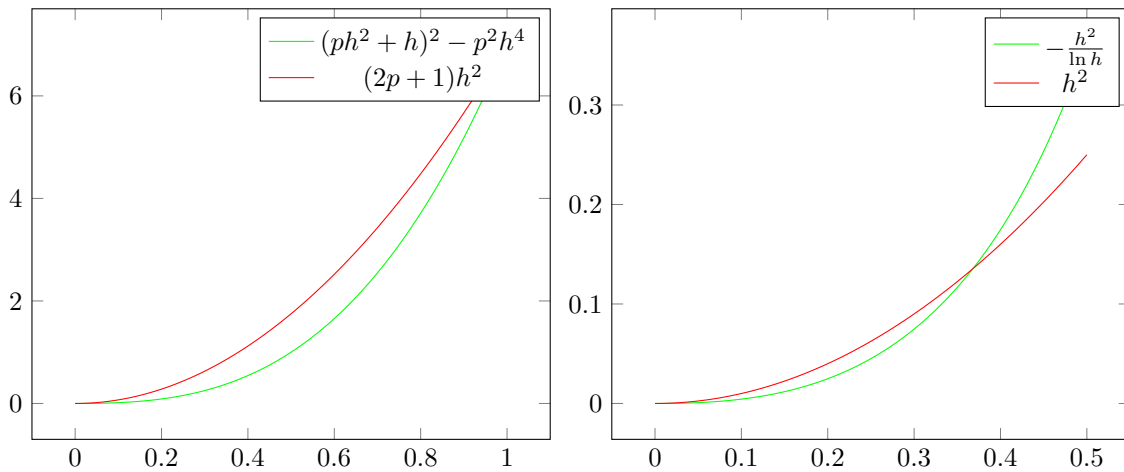
- Es gilt für $0 < h \leq \frac{1}{e}$: $|\ln(h)| \geq 1$. Also folgt

$$|f(h)| = \left| -\frac{h^2}{\ln(h)} \right| \leq h^2 \implies f(h) = \mathcal{O}(h^2).$$

- Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} |f(h)| &= \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{\sin(x+h) - 2\sin(x) + \sin(x-h)}{h^2} + \sin(x) \right| \\ &\stackrel{\text{de l'Hospital}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{\cos(x+h) - \cos(x-h)}{2h} \right| = \infty. \end{aligned}$$

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt stets $h^m \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Also existiert kein $m \in \mathbb{N}$ mit $f(h) = \mathcal{O}(h^m)$.

Abbildung 1: Links: $f_1(h)$ für $p = 1$ und $c = 7$, Rechts: $f_2(h)$ mit $c = 1$

Aufgabe 3. Quadratische Ergänzung führt auf die Lösungsformel

$$x_{1/2} = \pm \sqrt{p^2 - 1} + p$$

Also folgt

$$\frac{\partial F_{1/2}}{\partial p} = \pm \frac{p}{\sqrt{p^2 - 1}} + 1$$

Damit ergibt sich

$$k_{11} = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{p^2}}}{1 - \frac{1}{p^2} + \sqrt{1 - \frac{1}{p^2}}}$$

$$k_{21} = \frac{-1 + \sqrt{1 - \frac{1}{p^2}}}{-1 + \frac{1}{p^2} + \sqrt{1 - \frac{1}{p^2}}}.$$

Aus der Lösungsformel folgt zudem $F(p) \in \mathbb{R}^2 \iff |p| \geq 1$

Das alternativ parametrisierte Problem führt auf die Lösungsformel

$$x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{(t^2 + 1)^2}{4t^2} - 1} + \frac{t^2 + 1}{2t}.$$

Hier wird analog der Verstärkungsfaktor berechnet. Im ersten Fall wird das Problem schlecht konditioniert, wenn $|p| < 1$ wird, allerdings hat dann die Gleichung keine reellen Lösungen mehr.

Aufgabe 4. Es sei $I := [0, 1]$ und

$$f: I \rightarrow I, \quad f(x) := \begin{cases} 2x & \text{falls } x \in [0, 0.5) \\ 2 - 2x & \text{falls } x \in [0.5, 1] \end{cases}.$$

Die Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sei für ein $x_0 \in I$ definiert als

$$x_i = f(x_{i-1}).$$

a) siehe `zeltabbildung.cpp`

b) Beh.: Sei $x_0 = (0.m_1 \dots m_r)_2 \in [0, 1]$ eine Festkommazahl der Binärdarstellung mit höchstens r Nachkommastellen ungleich 0. Dann gilt $x_{r+1} = 0$.

Beweis. Beweis per Induktion nach r .

Für $r = 0$: trivial $f(0) = 0 \implies x_1 = 0$.

Sei Beh. gegeben für ein $r \in \mathbb{N}_0$. Dann sei

$$x_0 = (0.m_1 \dots m_{r+1})_2 \in [0, 1].$$

mit $m_{r+1} \neq 0$ (sonst bereits gezeigt).

Falls $x_0 \in [0, 0.5]$. Dann ist $m_1 = 0$ und

$$x_1 = f(x_0) = 2x_0 = 2 \sum_{i=1}^{r+1} m_i 2^{-i} = \sum_{i=1}^{r+1} m_i 2^{-i+1} = (0.\tilde{m}_1 \dots \tilde{m}_{r+1})_2.$$

Da $m_{r+1} = 1_2 \implies \tilde{m}_{r+1} = 0_2$. Also hat x_1 höchstens r Stellen ungleich 0. Wende I.V. auf x_1 an. Damit folgt $x_{r+1} = 0$.

Falls $x_0 \in [0.5, 1]$. Dann ist $m_1 = 1_2$ und

$$x_1 = f(x_0) = 2 - 2x_0 = 2 - 2 \sum_{i=1}^n m_i 2^{-i} = 2 - \sum_{i=1}^n m_i 2^{-i+1} = (0.\tilde{m}_1 \dots \tilde{m}_{r+1})_2.$$

Da $m_{r+1} = 1_2 \implies \tilde{m}_{r+1} = 0_2$. Also hat x_1 höchstens r Stellen ungleich 0. Wende I.V. auf x_1 an. Damit folgt $x_{r+1} = 0$. $\square$

c) siehe *zeltabbildung.cpp*