

| Aufgabe | A18 | A19 | A20 | A21 | $\Sigma$ |
|---------|-----|-----|-----|-----|----------|
| Punkte  |     |     |     |     |          |

**Aufgabe 18.** Sei  $K$  ein Körper,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A \in M_{n,n}(K)$  und  $I_A := \{f \in K[t] \mid f(A) = 0\}$ .

(a) Beh.:  $I_A \subseteq K[t]$  ist ein Ideal und  $\chi_A^{\text{char}} \in I_A$ .

*Beweis.*  $I_A$  ist Ideal, denn

(I1)  $0 \in I_A$ , denn  $0(A) = 0$ .

(I2) Seien  $f, g \in I_A$ . Dann ist  $(f+g)(A) = f(A) + g(A) = 0 + 0 = 0$ , also  $f+g \in I_A$ .

(I3) Sei  $f \in I_A$  und  $r \in K[t]$ . Dann ist  $(f \cdot r)(A) = f(A) \cdot r(A) = 0 \cdot r(A) = 0 \implies rf \in I_A$ .

Mit dem Satz von Cayley-Hamilton gilt  $\chi_A^{\text{char}}(A) = 0 \implies \chi_A^{\text{char}} \in I_A$ .  $\square$

(b) Beh.: Es ex. ein eindeutig bestimmtes Polynom  $\chi_A^{\text{min}} \in K[t] \setminus \{0\}$  mit  $I_A = (\chi_A^{\text{min}})$ .

*Beweis.* Es ist  $\chi_A^{\text{char}} \neq 0$  und  $\chi_A^{\text{char}} \in I_A$ , also  $I_A \neq (0)$ . Wegen  $K[t]$  HIR ex. ein bis auf Assoziiertheit eindeutig bestimmtes Polynom  $f \in K[t] \setminus \{0\}$  mit  $(f) = I_A$ . Da  $K$  Körper, ex. genau ein normiertes Polynom  $\chi_A^{\text{min}}$  mit  $\chi_A^{\text{min}} \triangleq f$  und damit  $(\chi_A^{\text{min}}) = I_A$ .  $\square$

(c) Sei  $\lambda \in K$ . Beh.:  $\chi_A^{\text{min}}(\lambda) = 0 \iff \chi_A^{\text{char}}(\lambda) = 0$ .

*Beweis.* Sei  $\lambda \in K$  mit  $\chi_A^{\text{char}}(\lambda) = 0$ . Dann ist  $\lambda$  Eigenwert von  $A$  zu Eigenvektor  $v \in K^n \setminus \{0\}$  mit  $Av = \lambda v$ . Für  $f \in K[t]$  gilt dann:

$$\begin{aligned} f(A)v &= a_0v + a_1Av + \dots + a_mA^mv \\ &= a_0v + a_1\lambda v + \dots + a_mA^{m-1}\lambda v \\ &= a_0v + a_1\lambda v + \dots + a_m\lambda^mv \\ &= f(\lambda)v \end{aligned}$$

Damit folgt

$$0 = \chi_A^{\text{min}}(A)v = \chi_A^{\text{min}}(\lambda)v.$$

Wegen  $v \neq 0$ , folgt  $\chi_A^{\text{min}}(\lambda) = 0$ .

Sei nun  $\chi_A^{\text{min}}(\lambda) = 0$ . Wegen  $\chi_A^{\text{char}} \in (\chi_A^{\text{min}})$  ex. ein  $f \in K[t]$  mit  $\chi_A^{\text{char}} = f \cdot \chi_A^{\text{min}}$ . Damit folgt

$$\chi_A^{\text{char}}(\lambda) = f(\lambda) \cdot \chi_A^{\text{min}}(\lambda) = f(\lambda) \cdot 0 = 0.$$

$\square$

(d) Sei  $B \in M_{n,n}(K)$ . Beh.:  $B \approx A \implies I_B = I_A$  und  $\chi_B^{\text{min}} = \chi_A^{\text{min}}$ .

*Beweis.* Sei  $B \approx A$ . Dann ex.  $S \in \text{GL}_n(K)$  mit  $B = SAS^{-1}$ . Es ist

$$\begin{aligned} (SAS^{-1})^m &= \overbrace{SA \overbrace{S^{-1} \cdot S}^{=E_n} AS^{-1} \cdot \dots \cdot SAS^{-1}}^{m\text{-mal}} \\ &= SA^m S^{-1} \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} f(SAS^{-1}) &= \sum_{k=0}^m a_k (SAS^{-1})^k \\ &= \sum_{k=0}^m a_k SA^k S^{-1} \\ &= S \cdot \sum_{k=0}^m a_k A^k \cdot S^{-1} \\ &= Sf(A)S^{-1}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
 f &\in I_A \\
 &\iff f(A) = 0 \\
 &\stackrel{S \neq 0}{\iff} Sf(A)S^{-1} = 0 \\
 &\iff f(SAS^{-1}) = 0 \\
 &\iff f(B) = 0.
 \end{aligned}$$

Also ist  $(\chi_A^{\min}) = I_A = I_B = (\chi_B^{\min})$  und, wegen  $\chi_A^{\min}$  und  $\chi_B^{\min}$  normiert,  $\chi_A^{\min} = \chi_B^{\min}$ .  $\square$

(e) Beh.: Mit  $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ist  $\chi_A^{\min} \neq \chi_A^{\text{char}}$ .

*Beweis.* Es ist  $P_A = \begin{pmatrix} t-1 & 0 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix}$ . Also  $c_1(A) = c_2(A) = t-1$ , also mit 19(b)  $\chi_A^{\min} = t-1$ , aber  $\chi_A^{\text{char}} = \det(P_A) = (t-1)^2 \neq t-1 = \chi_A^{\min}$ .  $\square$

**Aufgabe 19.** Sei  $K$  ein Körper.

(a) Sei  $g \in K[t]$  nichtkonstant und normiert mit Begleitmatrix  $B_g$ . Beh.:  $\chi_{B_g}^{\min} = g$ .

*Beweis.* Zunächst z.Z.:  $\deg(\chi_{B_g}^{\min}) \geq \deg(g)$ . Ang. es ex. ein  $0 \neq f \in I_A$  mit  $\mathbb{N} \ni m := \deg(f) < \deg(g) =: n \in \mathbb{N}$ . Es gilt  $\forall k \in \mathbb{N}$  mit  $k < n$ :

$$B_g^k e_1 = B_g^{k-1} B_g e_1 = B_g^{k-1} e_2 = \dots = e_{k+1}.$$

Damit folgt

$$f(B_g)e_1 = a_0 e_1 + a_1 e_2 + \dots + a_m e_{m+1} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Also  $a_0 = a_1 = \dots = a_m = 0 \implies f = 0$   $\nexists$ . Da  $\chi_A^{\min} \neq 0 \implies \deg(\chi_A^{\min}) \geq \deg(g)$ .

Da  $\chi_A^{\text{char}} \in (\chi_A^{\min})$ , ex. ein  $r \in K[t]$  mit  $g = \chi_A^{\text{char}} = r \cdot \chi_A^{\min}$ . Da  $K[t]$  nullteilerfrei, folgt also  $\deg(g) = \deg(\chi_A^{\text{char}}) \geq \deg(\chi_A^{\min})$ . Damit folgt  $\deg(g) = \deg(\chi_A^{\min})$  und  $\chi_A^{\min} \mid g$ . Da  $g$  und  $\chi_A^{\min}$  normiert, folgt  $g = \chi_A^{\min}$ .  $\square$

(b) Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $A \in M_{n,n}(K)$  mit Invariantenteilern  $c_1(A), \dots, c_n(A)$  und  $c_1(A) \mid \dots \mid c_n(A)$ . Beh.:  $c_n(A) = \chi_A^{\min}$ .

*Beweis.* Seien  $g_1, \dots, g_r$  die nichtkonstanten Invariantenteiler von  $A$ . Dann ist  $g_r = c_n$  und  $A \approx B_{g_1, \dots, g_r}$ .  $B_{g_1, \dots, g_r}$  ist diagonale Blockmatrix, d.h.

$$B_{g_1, \dots, g_r}^k = \begin{pmatrix} B_{g_1}^k & 0 & & \\ 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{g_r}^k \end{pmatrix}.$$

Damit folgt für  $f \in K[t]$  beliebig.

$$\begin{aligned}
 f &\in I_{B_{g_1, \dots, g_r}} \\
 &\iff f(B_{g_k}) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, r \\
 &\stackrel{(a)}{\iff} g_k \mid f \quad \forall k = 1, \dots, r \\
 &\stackrel{g_1 \mid g_2 \mid \dots \mid g_r}{\iff} g_r \mid f \\
 &\iff f = q \cdot g_r \\
 &\iff f \in (g_r).
 \end{aligned}$$

Also folgt  $(c_n) = (g_r) = I_{B_{g_1, \dots, g_r}} \stackrel{18(d)}{=} I_A$ . Da  $c_n$  normiert, folgt also  $c_n = \chi_A^{\min}$ .  $\square$

- Aufgabe 20.** (a) Es ist  $n = 8$ ,  $\chi_A^{\text{char}} = c_6(A) \cdot c_7(A) \cdot c_8(A) = (t+1) \cdot t(t+1) \cdot t^2(t+1)^3 = t^3(t+1)^5$  und  $\chi_A^{\text{min}} = c_8(A) = t^3(t+1)^5$ .
- (b) Es ist  $d_1(A) = \dots = d_5(A) = 1$ ,  $d_6(A) = c_6(A) = t+1$ ,  $d_7(A) = c_6(A) \cdot c_7(A) = t(t+1)^2$ ,  $d_8(A) = d_7(A) \cdot c_8(A) = t^3(t+1)^5$ .

$$A \approx B_{c_6, c_7, c_8} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & & & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & & & 0 \\ & & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} & & \end{pmatrix}.$$

- (c) Die Weierstraßteiler sind  $h_1 = t+1$ ,  $h_2 = t$ ,  $h_3 = t+1$ ,  $h_4 = t^2$ ,  $h_5 = (t+1)^3$ .

$$A \approx B_{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 21.** Für  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{Q})$  gilt:

$$P_A = \begin{pmatrix} t & -2 \\ -1 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

Also sind  $c_1(A) = 1$  und  $c_2(A) = t^2 - 2$ . Über  $\mathbb{Q}$  ist  $t^2 - 2$  irreduzibel, also  $h_1 = t^2 - 2$ . Damit folgt für die Weierstraßnormalform

$$A \approx B_{h_1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Über  $\mathbb{R}$  ist  $t^2 - 2$  reduzibel als  $t^2 - 2 = \underbrace{(t + \sqrt{2})}_{=: \tilde{h}_1} \underbrace{(t - \sqrt{2})}_{=: \tilde{h}_2}$ , also folgt

$$A \approx B_{\tilde{h}_1, \tilde{h}_2} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$