Christian Merk

**A1** $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: U \to \mathbb{C}$ Abb.

(a) **Bew.** (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $f$ stetig, $z \in U$ und $M \subseteq \mathbb{C}$ s.d. $f(z)$ innerer Punkt in $M$, d.h. es ex. $\varepsilon > 0$ s.d. $U_\varepsilon(f(z)) \subseteq M$. Da $f$ stetig $\exists \delta > 0$ s.d. $\forall y \in U$ mit $y \in U_\delta(z)$ gilt: $f(y) \in U_\varepsilon(f(z)) \subseteq M \Rightarrow y \in f^{-1}(M) \Rightarrow z \in U_\delta(z) \subseteq f^{-1}(M)$ also $z$ innerer Punkt von $f^{-1}(M)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $V \subseteq \mathbb{C}$ offen und $z \in f^{-1}(V) \subseteq U$. Dann gilt $f(z) \in V = \mathring{V}$ da $V$ offen, d.h. $f(z)$ innerer Punkt von $V$, also folgt mit (ii) $z$ innerer Punkt von $f^{-1}(V)$

$\Rightarrow f^{-1}(V) = \mathring{f^{-1}(V)} \Rightarrow f^{-1}(V)$ offen.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $z_0 \in U$ bel. und $\varepsilon > 0$. Dann ist $U_\varepsilon(z_0)$ offen, also nach (iii) $f^{-1}(U_\varepsilon(z_0))$ offen, d.h. $z_0$ ist innerer Punkt von $f^{-1}(U_\varepsilon(z_0)) \Rightarrow \exists \delta > 0$ s.d. $U_\delta(z_0) \subseteq f^{-1}(U_\varepsilon(z_0))$

$\Rightarrow \forall z \in U_\delta(z_0): f(z) \in U_\varepsilon(z_0). \Rightarrow f$ stetig in $z_0$. $\square$

(b) **Bew.** Sei $z_0 \in U$ mit $f(z_0) \neq 0$. Setze $\varepsilon := \frac{|f(z_0)|}{2}$. Dann ist $0 \notin U_\varepsilon(f(z_0))$ und offen. Setze nun $V := f^{-1}(U_\varepsilon(f(z_0)))$. Nach (a) ist wegen $f$ stetig $V$ offen und $\forall z \in V$ gilt $f(z) \in U_\varepsilon(f(z_0))$ also $f(z) \neq 0$. $\square$

(c) **Bew.** Sei $K \subseteq U$ kompakt. Sei $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von $f(K)$. Also

$f(K) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ insb. ist

$K \subseteq \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$, denn für $z \in K$: $f(z) \in f(K) \Rightarrow \exists i \in I: f(z) \in U_i \Rightarrow z \in f^{-1}(U_i)$.

Da $f$ stetig sind die $f^{-1}(U_i)$ offen, d.h. $(f^{-1}(U_i))_{i \in I}$ offene Überd. von $K$. Da $K$ kompakt $\exists$ endl. Teilüberdeckung von $K$, oE gilt nach Umnummerierung:

$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_i) \Rightarrow f(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, denn für $z \in K$ $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ s.d. $z \in f^{-1}(U_i)$, d.h. $f(z) \in U_i$. Also $f(K)$ kompakt. $\square$

**A2** Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$.

(a) **Bew.** Sei $f: D \to \mathbb{C}$ lokal konstant. Sei $z_0 \in D$ bel und $\varepsilon > 0$. Dann $\exists \delta > 0$ s.d. $U_\delta(z_0) \subseteq D$ und $f|_{U_\delta(z_0)}$ konstant. Insb gilt $\forall z \in U_\delta(z_0)$: $f(z) = f(z_0)$

$\Rightarrow |f(z) - f(z_0)| = 0 < \varepsilon$ $\square$

(b) Bew. „⇒" Kontraposition. Sei $f: D \to \mathbb{C}$ lokal konstant. Sei $f(D) = (y_i)_{i\in I}$ wobei $I$ bel. Indexmenge, s.d. $y_i \neq y_j$ $\forall i \neq j$. Dann gilt $\forall y_i: \exists x_i \in D: f(x_i) = y_i$.

Da $f$ lokal konstant $\exists \delta_i > 0$ s.d. $U_{\delta_i}(x_i) \subseteq D$ und $f|_{U_{\delta_i}(x_i)}$ konstant. Da $y_i$ paarw. verschieden gilt $U_{\delta_i}(x_i) \cap U_{\delta_j}(x_j) = \emptyset$ $\forall i \neq j$. Und $\forall x \in D$ $\exists y \in f(D): f(y) = x$

$\Rightarrow D \subseteq \bigcup_{i\in I} U_{\delta_i}(x_i)$. Da $U_{\delta_i}(x_i) \subseteq D$ $\Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_{\delta_i}(x_i) = D$.

Sei nun $f$ nicht konstant, dann ist $\# I > 1$. Dann sei $i_0 \in I$ bel. Setze $V_1 := U_{\delta_{i_0}}(x_{i_0})$ und $V_2 := \bigcup_{i\in I\setminus\{i_0\}} U_{\delta_i}(x_i)$. Dann ist auch $V_2$ offen, da alle $U_{\delta_i}(x_i)$ offen. Außerdem ist $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ und $V_1 \cup V_2 = D$. $\Rightarrow$ $D$ nicht zshgd.

„⇐" Kontraposition. Sei $D$ nicht zshgd. Dann sei $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen und $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = D$, $U \neq \emptyset \neq V$.

Dann setze $f: D \to \mathbb{C}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in U \\ 0 & x \in V \end{cases}$$

Beachte, dass $f$ wohldefiniert und lokal konstant, da $U, V$ offen. Aber $f$ nicht konstant $\square$

A3| (a) $h: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto z\bar{z}$$

Beh. $h$ nur kompl. diff'bar in $z = 0$.

Bew. Für $z \in \mathbb{C}$ gilt mit $z = a + ib$: $h(z) = z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - b^2 = u(z) + iv(z)$

wobei $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 - y^2$ und $v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 0$

Dann ist
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y \qquad -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Dann gilt $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist $\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$ oder $\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$, also $\forall z \neq 0$ sind Cauchy-Riemann-DGL nicht erfüllt $\Rightarrow$ $h$ nicht diff'bar.

Für $(x,y) = 0$ sind Cauchy-Riemann-DGL erfüllt, d.h. $h$ in $z = 0$ diff'bar.

(b) $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und zshgd. $f: D \to \mathbb{C}$ holomorph. Zz: Falls $f(D) \subseteq \mathbb{R}$, ist $f$ konstant.

Bew. Sei für $z \in D$ $z = x + iy$ und $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ dann ist $v(x,y) = 0$.

Da $f$ in $z$ kompl. diff'bar folgt $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$.

Also folgt $\forall z = x + iy \in D$ $\exists \delta > 0$ s.d. $\forall a + ib \in B_\delta(z)$: $\frac{\partial u}{\partial x}(a,b) = 0 = \frac{\partial u}{\partial y}(a,b)$.

Also folgt $v$ konstant auf $B_\delta(z)$, also $v$ lokal-konstant. Da $v = 0$ ist also auch $f$ lokal-konstant. Da $D$ zshgd folgt nach 2(b), dass $f$ konstant.

$\square$

(c) • Es ist $\mathbb{C}$ offen und zshgd. Außerdem $f_1(\mathbb{C}) = \mathbb{R}$ aber $f_1$ nicht konstant, denn $f_1(i) = 1 \neq 0 = f_1(0)$. Also nach (b) nicht holomorph.

• Analog zu $f_1$: $f_2$ reell-wertig und $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ offen und zshgd, aber $f_2$ nicht konstant, also $f_2$ nicht holomorph.

• $f_3$ nicht holomorph, da nicht kompl. diff'bar in $z = 1$, denn

für $z = x+iy \in \mathbb{C}$ ist $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit

$u(x,y) = x^2$ und $v(x,y) = xy$.

Dann gilt $\frac{\partial u}{\partial x}(1,0) = 2 \neq 1 = \frac{\partial v}{\partial y}(1,0)$

also C-R-DGL nicht erfüllt.

(d) $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: D \to \mathbb{C}$ holomorph.

<u>Beh.</u> $\overline{D}$ offen.

<u>Bew.</u> Es ist $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ stetig und bijektiv mit $f = f^{-1}$. Da $\overline{D} = f(D) = f^{-1}(D)$ und $D$ offen, folgt $\overline{D}$ offen.

$\square$

<u>Beh.</u> $g: \overline{D} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$ holomorph mit $g'(z) = \overline{f'(\bar{z})}$ $\forall z \in \overline{D}$.

<u>Bew.</u> Sei $\bar{z}_0 \in D$. Dann betrachte

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{f(\bar{z})} - \overline{f(\bar{z}_0)}}{\bar{\bar{z}} - \bar{\bar{z}}_0} \overset{\overline{\cdot}\text{-Autom. von } \mathbb{C}}{\overset{!}{=}} \lim_{z \to z_0} \overline{\left(\frac{f(\bar{z}) - f(\bar{z}_0)}{\bar{z} - \bar{z}_0}\right)}$$

$$\underset{\overline{\cdot}\text{ stetig}}{\overset{}{=}} \overline{\left(\lim_{z \to z_0} \frac{f(\bar{z}) - f(\bar{z}_0)}{\bar{z} - \bar{z}_0}\right)}$$

$$= \overline{f'(\bar{z}_0)}$$

$\square$