Funktheo Blatt 5 Christian Merten, Julia Fila

A1	A2	Σ

A1 (a) $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ Gebiete

(i) Beh.: Wahr

Bew.: · Für $z \in D_1 \cap D_2$ bel. ist $\overline{zz^*} \subseteq D_1$ und $\overline{zz^*} \subseteq D_2$ also $\overline{zz^*} \subseteq D_1 \cap U_2$. Außerdem endl. Schnitte offener Mengen offen.

· Für $z \in D_1 \cup D_2$ bel. ist $\overline{zz^*} \subseteq D_1$ oder $\overline{zz^*} \subseteq D_2$ also $\overline{zz^*} \subseteq D_1 \cup D_2$. Außerdem Vereinigungen offener Mengen offen. $\square$

(ii) Beh.: Die Aussage ist falsch.

Bew.: Setze $D_1 := U_1(1)$ und $D_2 := \mathbb{C}^\times$. Dann ist $D_1 \subseteq D_2$ und D_1 nach VL Sterngebiet, aber D_2 nach VL kein Sterngebiet. $\square$

(iii) Beh.: Wahr

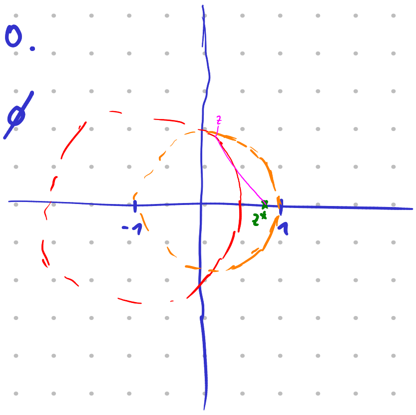
Bew.: offene Bälle sind Sterngebiete und Sterngebiete insbes. offen. $\square$

(b) (i)
$$\begin{aligned} U_1 &:= \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ und } |z+1| > \sqrt{2} \} \\ &= U_1(0) \cap \left(\mathbb{C} \setminus \overline{U_{\sqrt{2}}(-1)} \right) \\ &= U_1(0) \setminus \overline{U_{\sqrt{2}}(-1)} \end{aligned}$$

Kein Sterngebiet, denn für $z^* \in U_1$ bel. betrachte:

Fall 1: $\operatorname{Im}(z^*) \geq 0$: Es ist $i \in \partial U_1$, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists z \in U_1$ s.d. $|z - i| < \varepsilon$. Nun betrachten wir die Schnittpunkte von $\overline{z^* z}$ mit $\partial U_{\sqrt{2}}(-1)$. Dazu sei OE $\operatorname{Im}(z^*) = 0$, denn sonst projeziere z^* entlang $\overline{zz^*}$ auf die reelle Achse. Falls dadurch neue Schnittpunkte mit $\partial U_{\sqrt{2}}(-1)$ entstehen, wähle z als die Projektion und fertig. Nun sei also $\operatorname{Im}(z^*) = 0$.

Für hinreichend kleines ε ist nun $\partial U_{\sqrt{2}}(-1) \cap \overline{zz^*} \neq \emptyset$ und es folgt die Beh.



Fall 2: $\operatorname{Im}(z^*) < 0$: Analog.

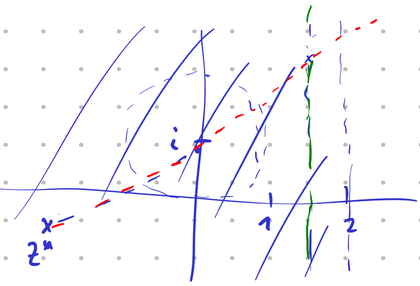
(ii) $U_2 := \{ z \in \mathbb{C} \mid Re(z) < 1 \text{ oder } Im(z) > 2 \}$

$$= \underbrace{\{ z \in \mathbb{C} \mid Re(z) < 1 \}}_{D_1} \cup \underbrace{\{ z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 2 \}}_{D_2}.$$

Es sind $D_1 = Re^{-1}((-\infty, 1))$ und $D_2 = Im^{-1}((2, \infty))$ offen, da Re, Im stetig. Außerdem sind D_1 und D_2 als offene Rechtecke konvex und damit Sterngebiete, wobei jeder Punkt Sternmittelpunkt ist. Also insbes. $-2+3i \in D_1 \cap D_2$. Also U_2 Sterngebiet nach (a)(i).

(iii) $U_3 := \{ z \in \mathbb{C} \mid Re(z) < 2 \text{ und } |z-i| > 1 \}$

Kein Sterngebiet, denn für $z^* \in U_3$ bel. sei z der Schnittpunkt der von der Strecke $\overline{z^* i}$ induzierten Geraden mit der Geraden $\{ \frac{3}{2} + it \mid t \in \mathbb{R} \}$. Dann ist $z \in U_3$ (Skizze) aber nach Konstruktion liegt i auf $\overline{z^* z}$ also $\overline{z^* z} \notin U_3$.



□

A2| $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Beh.: $\bar{\cdot} : D \longrightarrow \mathbb{C}$ hat keine Stamm-fkt auf D.

Bew.: Da jede nicht leere offene TM einen inneren Punkt enthält genügt es die Aussage für offene Umgebungen zu zeigen. Sei also $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ bel. Dann setze $r := \frac{\varepsilon}{2} > 0$

$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow B_\varepsilon(z_0)$, $\varphi \longmapsto re^{i\varphi} + z_0$. Dann ist $\gamma'(\varphi) = rie^{i\varphi}$ $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$

Dann folgt

$$\int_\gamma \bar{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \left(\overline{re^{i\varphi} + z_0}\right) rie^{i\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(re^{-i\varphi} + \bar{z}_0\right) ire^{i\varphi} d\varphi$$

$$= ir^2 \int_0^{2\pi} d\varphi + \bar{z}_0 \int_0^{2\pi} ire^{i\varphi} d\varphi$$

$$= 2\pi i r^2 + \bar{z}_0 \int_0^{2\pi} ire^{i\varphi} d\varphi$$

$$= 2\pi i r^2 + \bar{z}_0 \underbrace{\int_\gamma 1\,dz}_{=0}$$

da 1 holomorph und $B_\varepsilon(0)$ Sterngebiet also nach Cauchy $= 0$

$$= 2\pi i r^2 \neq 0$$

Da γ geschlossen, hat $\bar{\cdot}$ keine Stammfkt auf $B_\varepsilon(z_0)$. $\square$