

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	Σ
Punkte					

Aufgabe 1. (a) Beh.: L ist ein Zerfällungskörper von $X^4 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

Beweis. Es ist zunächst

$$X^4 - 2 = (X^2 - \sqrt{2})(X^2 + \sqrt{2}) = (X - \sqrt[4]{2})(X + \sqrt[4]{2})(X + i\sqrt[4]{2})(X - i\sqrt[4]{2}).$$

Weiter ist $i \in \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i\sqrt[4]{2})$, denn

$$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i\sqrt[4]{2}) \ni \frac{1}{2} \sqrt[4]{2} (i\sqrt[4]{2}) (\sqrt[4]{2})^2 = i.$$

Also $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i\sqrt[4]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i) = L$, also L Zerfällungskörper von $X^4 - 2$. $\square$

(b) Es ist $\mathbb{Q} \subseteq L$ endliche Körpererweiterung und $\text{char}(\mathbb{Q}) = 0$, also folgt mit dem letzten Zettel

$$8 = [L : \mathbb{Q}] = [L : \mathbb{Q}]_s = \#\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(L, \overline{\mathbb{Q}})$$

mit $\overline{\mathbb{Q}}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}$. Da jeder $\mathbb{Q}$ -Automorphismus von $L \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ insbesondere $\mathbb{Q}$ -Homomorphismus $L \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}$, folgt

$$\#\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(L, L) \leq 8.$$

Sei $x \in \mathbb{Q}(L, L)$. Dann gilt für $a_0, \dots, a_7 \in \mathbb{Q}$:

$$x = a_0 + ia_1 + \sqrt[4]{2}a_2 + \sqrt[4]{2}^3 a_3 + \sqrt{2}a_4 + i\sqrt[4]{2}a_5 + i\sqrt{2}a_6 + i\sqrt[4]{2}a_7.$$

Diese Darstellung ist eindeutig, da die Vorfaktoren der a_i eine $\mathbb{Q}$ Basis von L darstellen. Sei nun $\tau_i: L \rightarrow L$ für $i \geq 1$ mit τ_i ändert Vorzeichen des i -ten Koeffizienten. Dabei bezeichne $\tau_0 = \text{id}_L$. Da $\sigma: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, r \mapsto -r$ ein Körperhomomorphismus folgt durch Nachrechnen, dass die τ_i ebenfalls Körperhomomorphismen sind. Dabei ist $\tau_i|_{\mathbb{Q}} = \text{id}$, da für $x \in \mathbb{Q}$ folgt $x = a_0$ und damit $\tau_i(x) = \tau_i(a_0) = a_0 = x$.

Die τ_i sind bereits 8 $\mathbb{Q}$ -Automorphismen von L , d.h. mit der Vorüberlegung alle $\mathbb{Q}$ -Automorphismen von L .

Aufgabe 2. (i) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}e^{i\pi/4}, -\sqrt{2}e^{i\pi/4}, \sqrt{2}e^{-i\pi/4}, -\sqrt{2}e^{-i\pi/4})$, denn

$$X^4 + 4 = (X^2 - 2i)(X^2 + 2i) = (X - \sqrt{2}e^{i\pi/4})(X + \sqrt{2}e^{i\pi/4})(X - \sqrt{2}e^{-i\pi/4})(X + \sqrt{2}e^{-i\pi/4}).$$

(ii) $L = \mathbb{Q}\left(\left(\exp\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right)_{k=1}^8\right)$, denn das sind gerade die 8-ten Einheitswurzeln, also folgt

$$X^8 - 1 = \prod_{k=1}^8 (X - e^{k\pi i/4}).$$

(iii) $L = \mathbb{Q}\left(\sqrt{\sqrt{3}-1}, -\sqrt{\sqrt{3}-1}, \sqrt{-\sqrt{3}-1}, -\sqrt{-\sqrt{3}-1}\right)$, denn

$$\begin{aligned} X^4 + 2X^2 - 2 &= (X^2 + 1 - \sqrt{3})(X^2 + 1 + \sqrt{3}) \\ &= \left(X - \sqrt{\sqrt{3}-1}\right) \left(X + \sqrt{\sqrt{3}-1}\right) \left(X - \sqrt{-1-\sqrt{3}}\right) \left(X + \sqrt{-1-\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 3. (a) Beh.: $L = K(\alpha)$.

Beweis. Es ist $[L : K] = n$. Da σ_i K -Automorphismus, ist $\sigma := \sigma_i|_K = \text{id}$.

Sei nun f Minimalpolynom von α über K . Dann ist $f^\sigma = f^{\text{id}} = f$. Betrachte $\sigma'_i: K(\alpha) \rightarrow L$ mit $\sigma'_i = \sigma_i|_{K(\alpha)}$. Dann setzt σ'_i σ fort, es folgt also mit 3.40 $\sigma'_i(\alpha)$ Nullstelle von $f^\sigma = f$. Da die $\sigma'_i(\alpha)$ paarweise verschieden, folgt $\deg(f) \geq n$. Da $\deg(f) = [K(\alpha) : K] \leq [L : K] = n$ folgt $\deg(f) = n$. Damit folgt mit Gradsatz

$$n = [L : K] = [L : K(\alpha)][K(\alpha) : K] = [L : K(\alpha)]n \implies [L : K(\alpha)] = 1.$$

Also $L = K(\alpha)$. $\square$

(b) Beh.: Jeder K Homomorphismus $\sigma: L \rightarrow L$ ist Automorphismus.

Beweis. Sei $\sigma: L \rightarrow L$ ein K -Hom. Sei $\alpha \in L$ und $f \in K[X]$ Minimalpolynom von α über L . Seien weiter $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ Nullstellen von f über L mit $\Gamma := \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$. Dann gilt, da $\sigma|_K = \text{id}$ und σ Ringhom, folgt

$$f(\sigma(\gamma)) = \sigma(f(\gamma)) = \sigma(0) = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Damit gilt $\sigma(\Gamma) \subseteq \Gamma$. Da σ als Körperhom. injektiv und Γ endlich (da $\#\Gamma \leq \deg(f) < \infty$) folgt $\sigma(\Gamma) = \Gamma$, also $\exists \gamma \in \Gamma: \sigma(\gamma) = \alpha$.

Also ist σ auch surjektiv und damit bijektiv. $\square$

Beh.: Wenn L/K nicht algebraisch ist, ist die Aussage falsch.

Beweis. Betrachte $\mathbb{Q}(\pi)/\mathbb{Q}$ mit dem durch folgende Zuordnung festgelegten Körperhomomorphismus

$$\begin{aligned} \sigma: \mathbb{Q}(\pi) &\rightarrow \mathbb{Q}(\pi) \\ 1 &\mapsto 1 \\ \pi &\mapsto \pi^2. \end{aligned}$$

Dann ist $\sigma|_{\mathbb{Q}} = \text{id}$ also σ $\mathbb{Q}$ -Homomorphismus, aber es gilt $\sigma(x) \neq \pi \quad \forall x \in \mathbb{Q}(\pi)$, denn π transzendent über $\mathbb{Q}$ (Ang.: es gäbe ein solches x , dann ist $\pi = \sigma(x) = \sum_{k=0}^n a_k \pi^{2k}$ für $a_k \in \mathbb{Q}$, also $0 = \sum_{k=0}^n a_k \pi^{2k} - \pi$, also insbesondere π algebraisch über $\mathbb{Q}$). $\square$

Aufgabe 4. (a) Sei $K \subseteq R \subseteq L$ Unterring. Beh.: R Körper.

Beweis. Sei $\alpha \in R \setminus \{0\}$. Dann ist $\alpha \in L$ algebraisch über K , also sei $f \in K[X]$ Minimalpolynom zu α mit

$$f = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \dots + c_0$$

für $c_i \in K$. Es ist $c_0 \neq 0$, da f irreduzibel. In L existiert α^{-1} . Damit folgt

$$0 = \alpha^{-1}f(\alpha) = \alpha^{-1}(\alpha^n + c_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + c_0) = \alpha^{n-1} + c_{n-1}\alpha^{n-2} + \dots + c_0\alpha^{-1}.$$

Da $c_0 \neq 0$ folgt

$$\alpha^{-1} = -c_0^{-1}(\alpha^{n-1} + c_{n-1}\alpha^{n-2} + \dots + c_1).$$

Da $\alpha \in R$, $c_i \in K$ und R Ring mit $K \subseteq R$ folgt $\alpha^{-1} \in R$. $\square$

(b) Es bezeichne R die Menge aus der Aufgabenstellung. Beh.: $EF = R$.

Beweis. (i) Z.z.: R Ring. Da $K \subseteq E, F$ ist $1 = 1_K 1_K \in R$ und $0 = 0_K 0_K \in R$. Weiter seien $x, y \in R$ mit $x = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ und $y = \sum_{i=1}^m c_i d_i$ mit $a_i, c_i \in E$, $b_i, d_i \in F$. Durch Ergänzung der a_i und b_i am Ende durch c_i bzw. d_i folgt direkt

$$x + y = \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^m c_i d_i = \sum_{i=1}^{n+m} a_i b_i \in R.$$

Für xy entstehen durch Ausmultiplizieren Summanden der Form $a_i b_i c_j d_j = \underbrace{a_i c_j}_{\in E} \underbrace{b_i d_j}_{\in F}$, also

folgt durch Umbenennung $xy \in R$ aus $x + y \in R$. Da E und F Körper übertragen sich Assoziativ und Distributivgesetz direkt auf R . Auch additive Inverse existieren, da E, F Körper sind folgt

$$x + \underbrace{\sum_{i=1}^n -(a_i b_i)}_{=: -x} = \sum_{i=1}^n (a_i b_i - a_i b_i) = 0.$$

Also $-x \in R$.

(ii) Sei nun $H \subseteq L$ Körper, der E und F enthält, dann folgt insbesondere $R \subseteq H$.

- (iii) Nach (i) ist R Ring und offensichtlich Teilring von L , damit nach (a) Körper und wegen (ii) kleinster Teilkörper von L , der E und F enthält. Also $EF = R$.

□

- (c) Beh.: Sind $[E: K]$ und $[F: K]$ endlich, so auch $[EF: K]$ und es gilt

$$[EF: K] \leq [E: K][F: K].$$

Beweis. Seien $[E: K]$, $[F: K]$ endlich. Dann sind E und F e.d. als K VR, insbesondere existieren α_i, β_i , s.d. $(\alpha_i)_{i=1}^n$ Basis von E und $(\beta_i)_{i=1}^m$ Basis von F . Wegen (b) ist damit $(\alpha_i \beta_j)_{i,j=1}^{n,m}$ endliches Erzeugendensystem von EF der Länge nm . Damit folgen beide Behauptungen. □