Algebra Blatt 12 Christian Merten, Zichu Li:

A1	A2	A3	Σ

A1 (a) $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Zz: $\varprojlim_n M/p^n M \cong M$.

$$p^n M = p^n \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} p^n\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Also ist $M/p^nM \cong M$ also $\varprojlim_n M/p^nM \cong \varprojlim_n M \cong M$. □

(b) Beh: $\hat{M} \cong \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ bezüglich der Teilraumtopologie der p-adischen Top. auf N.

Bew. Es ist $\hat{M} \cong \varprojlim_n \alpha(M)/p^nN \cap \alpha(M)$

Es ist $p^nN = p^n \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \cong \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} p^n\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ und

$\alpha(M) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, also folgt

$$p^nN \cap \alpha(M) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} p^n\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \cap \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} p^{k-1}\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} = \bigoplus_{k > n} p^{k-1}\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$$

also $\alpha(M)/p^nN \cap \alpha(M) \cong \bigoplus_{k=1}^{n} p^{k-1}\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \cong \bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, wobei $\varphi_n : \bigoplus_{k=1}^{n+1} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{kan}} \bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ die Übergangsabbildungen sind. Damit folgt

$$\hat{M} = \varprojlim_n \bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \left\{ \left((m_k)_{k=1}^{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \;\middle|\; m_{kn} = m_{k(n+1)} \; \forall k \in \{1, \ldots, n\} \text{ und } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Betrachte $\psi: \hat{M} \longrightarrow \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $(m_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto (m_{nn})_{n \in \mathbb{N}}$. Es ist $\ker \psi = 0$, denn für $m_{nn} = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und Kompatibilität folgt induktiv $m_{kn} = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}, k \in \{1, \ldots, n\}$.
Außerdem ist ψ offensichtlich surjektiv und Gruppenhom. □

Beh: M bezügl. der Teilraum-top. nicht vollständig.

Bew: Betrachte $\varphi: M \xrightarrow{\text{kan}} \hat{M} = \varprojlim_n \bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $(m_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto \left((m_i)_{i=1}^{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Es gzz, dass φ kein Isom. ist. Da ψ Iso kann $\psi \circ \varphi$ betrachtet werden. Es ist dann $(\psi \circ \varphi)((m_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (m_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Also $\psi \circ \varphi$ ist die kan. Inklusion $\bigoplus \mathbb{Z}/p \hookrightarrow \prod \mathbb{Z}/p$.
Da $\mathbb{Z}/p \neq 0$ ist diese nicht surjektiv. □

(c) Betrachte $0 \longrightarrow M \xrightarrow[\sim]{\alpha} \alpha(M) \longrightarrow 0$ exakte Folge ab. Gruppen

Das induziert

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \hat{M} \arrow[r] \arrow[d, "\wr\, (a)"] & \widehat{\alpha(M)} \arrow[d, "\wr\, (b)"] \\ 0 \arrow[r] & \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r, hook, "\text{kan}"] & \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Aber $\bigoplus \mathbb{Z}/p \xhookrightarrow{\text{kan}} \prod \mathbb{Z}/p$ nicht surjektiv, also diese Folge nicht rechtsexakt.

$\square$

A2 (a) Da Ideale Teilmengen sind diese halbgeordnet durch Inklusion, es bleibt also Totalität zu zeigen. Seien $a, b \subseteq A$ Ideale. OE $b \nsubseteq a$. Dann ex. ein $y \in b \setminus a$, also $y \neq 0$. Sei nun $x \in a$ bel. Falls $x = 0$ ist $x \in b$. Sonst ist $\frac{x}{y} \in A$ oder $\frac{y}{x} \in A$. Falls $\frac{y}{x} \in A \Rightarrow y = \frac{y}{x} \cdot x \in (x) \subseteq a$ ↯ Also $\frac{x}{y} \in A$ und analog $x \in b$. Also $a \subseteq b$. □

(b) Aus (a) folgt, dass maximal ein Max.ideal in A existiert. Es g.z.z., dass m maximal ist. Dazu sei $a \subsetneq A$ Ideal. Sei $x \in a$. Falls $x = 0$, folgt $x \in m$. Sonst sei $x \neq 0$. Es ist $x \notin A^\times$ sonst wäre $a = (1)$, also $x^{-1} \in K \setminus A$ also $x \in m$. Also $a \subseteq m$ und damit m maximal. □

(c) Zunächst ist jeder flache A-Modul torsionsfrei. Sei M A-Modul. Da $M \cong \varinjlim_{i \in I} M_i$ mit $(M_i)_{i \in I}$ Familie der e.e. Untermoduln von M und da $\varinjlim$ mit $\otimes_A$ vertauscht und $\varinjlim$ exakt, sei oE M e.e.. Also gibt es in der Menge der (endlichen) ES von M ein minimales Element. Seien diese Erzeuger $x_1, \dots, x_r$.

Ang $x_1, \dots, x_r$ linear abhängig. Dann ex. $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sd. $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_r x_r = 0$ mit $\alpha_i \neq 0$.

Nach (der verschärften Aussage in) (e) ex. ein $i \in \{1, \dots, r\}$ sd. $(\alpha_i) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. OE $i = 1$. Dann ex. $a_2, \dots, a_r \in A$, sd. $\alpha_1(x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_r x_r) = 0$, also da M torsionsfrei und $\alpha_1 \neq 0$ folgt $x_1 = -a_2 x_2 - \dots - a_r x_r$. ↯ zur Minimalität des ES. #

Also M frei, insbes. flach. □

(d) $(A_i, (\phi_{ij} : A_i \to A_j)_{i \leq j})_{i \in I}$ direktes System. Zz: $\varinjlim_{i \in I} A_i$ Bewertungsring.

① Zz: $\varinjlim A_i$ nullteilerfrei. Seien dazu $x, y \in \varinjlim A_i$ mit $xy = 0$. Nun ex. $i \in I$ sd $x = \phi_i(x_i)$ und $y = \phi_i(y_i)$, wobei $\phi_i : A_i \xrightarrow{\text{kan}} \varinjlim A_i$ Ringhom. Also $0 = xy = \phi_i(x_i)\phi_i(y_i) = \phi_i(x_i y_i)$. Außerdem $0 = \phi_i(0)$ also ex. ein $j \in I$ mit $i \leq j$ sd.

$0 = \phi_{ij}(0) = \phi_{ij}(x_i y_i) = \phi_{ij}(x_i)\phi_{ij}(y_i)$. Da A_j nullteilerfrei, folgt $\phi_{ij}(x_i) = 0$ oder $\phi_{ij}(y_i) = 0$ also $x = \phi_i(x_i) = \phi_j(\phi_{ij}(x_i)) = 0$ oder analog $y = 0$.

② Sei $x \in Q(\varinjlim A_i)^\times$. Es sei $x = \frac{a}{b}$ für $a, b \in \varinjlim A_i$. Nun ex. $i \in I$ sd. $a = \phi_i(a_i)$ und $b = \phi_i(b_i)$ für $a_i, b_i \in A_i$. Da A_i Bew.ring und $a_i, b_i \neq 0$ (sonst $a = 0$ oder $b = 0$) ist $\frac{a_i}{b_i} \in A_i$ oder $\frac{b_i}{a_i} \in A_i$.

Falls $\frac{a_i}{b_i} \in A_i$: Sei $\frac{r}{s} = \phi_i\left(\frac{a_i}{b_i}\right)$. Dann gilt $\frac{r}{s} \cdot b = \phi_i\left(\frac{a_i}{b_i}\right) \cdot \phi_i(b_i) = \phi_i(a_i) = a$ also $\frac{rb}{s} = \frac{a}{1}$ nach Def. von $Q(\dots)$ folgt $rb = as$, also $\frac{r}{s} = \frac{a}{b}$ also $\frac{a}{b} = \phi_i\left(\frac{a_i}{b_i}\right) \in \varinjlim A_i$. Für $\frac{b_i}{a_i} \in A_i$ analog. □

(e) Beh. Für $(x_1,\dots,x_r) \subseteq A$ mit $x_i \neq 0$ ex. ein $i \in \{1,\dots,r\}$ s.d. $(x_i) = (x_1,\dots,x_r)$.

Bew. Induktion nach r. Falls $r=1$, klar. Sei nun $r>1$.

Dann ist $\frac{x_1}{x_2} \in A$ oder $\frac{x_2}{x_1} \in A$. OE $\frac{x_1}{x_2} \in A$. Dann ist $x_1 = \frac{x_1}{x_2} \cdot x_2$ also $x_1 \in (x_2)$ insbes.

$x_1 \in (x_2,\dots,x_r)$. IV wendet auf $(x_1,\dots,x_r) = (x_2,\dots,x_r)$ an. $\square$

Wenn A noethersch ist jedes Ideal e.e. also Hauptideal.

(f) Beh. $\leq$ Totalordnung

Bew. ① $\leq$ ist wohldef., denn für $x_1,x_2,y \in K^\times$ mit $\overline{x_1} = \overline{x_2}$, also $x_1 = x_2 r$ wobei $r \in A^\times$, und

$x_1 y^{-1} \in A \iff x_2 y^{-1} = x_1 r^{-1} y^{-1} \overset{K^\times \text{ kommu.}}{=} x_1 y^{-1} \underbrace{r^{-1}}_{\in A^\times} \in A.$

Analog für y.

② Sei $\bar{x} \leq \bar{y}$ und $\bar{y} \leq \bar{x} \Rightarrow xy^{-1} \in A$ und $yx^{-1} \in A$. Also ex. $a,b \in A$ sd.

$xy^{-1} = a$ und $yx^{-1} = b$ also $1 = xy^{-1}yx^{-1} = ab$, also $a,b \in A^\times$, insbes.

$x = ya$ mit $a \in A^\times$ also $\bar{x} = \bar{y}$.

③ Sei $\bar{x} \leq \bar{y}$ und $\bar{y} \leq \bar{z}$. Dann ist $xy^{-1} \in A$ und $yz^{-1} \in A \Rightarrow xz^{-1} = xy^{-1}yz^{-1} \in A$

④ Seien $\bar{x},\bar{y} \in T$ mit $xy^{-1} \notin A$. Da A Bewertungsring folgt $yx^{-1} = (xy^{-1})^{-1} \in A$,

also $\bar{y} \leq \bar{x}$. $\square$

Beh. $|x+y| \leq \max\{|x|,|y|\}$

Bew. Seien $x,y \in K^\times$. Sei oE $\bar{x} \leq \bar{y}$. Dann gilt $(x+y)y^{-1} = \underbrace{xy^{-1}}_{\in A} + 1 \in A$ also

$|x+y| \leq |y| = \max\{|x|,|y|\}$. $\square$

A3| Betrachte zunächst

$Y \subseteq \operatorname{Specm}(A)$ abgeschl. $\iff$ $\exists$ Ideal $a \subseteq A$ sd. $Y = \operatorname{Specm}(A) \cap V(a)$

$= \{ m \subseteq A \text{ max. Ideal}: m \supseteq a \}$

$=: V_m(a)$

(a) Betrachte $\operatorname{Specm}(\mathbb{Z}) = \{ 2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, \dots \}$. Dann ist $\operatorname{Specm}(\mathbb{Z}) = V_m(0)$ abgeschlossen.

Beh. $\operatorname{Specm}(\mathbb{Z})$ irreduzibel. Für $a \subseteq A$ Ideal ist $a = n\mathbb{Z}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $n\mathbb{Z} \subseteq p\mathbb{Z} \iff p \mid n$. Falls $n \neq 0$ hat n nur endl. viele Teiler und $\# V_m(a) < \infty$. Also ex. keine zwei Ideale $a, b \subseteq A$ mit $a \neq 0 \neq b$ sd. $\operatorname{Specm}(\mathbb{Z}) = V_m(a) \cup V_m(b)$, da $\# \operatorname{Specm}(\mathbb{Z}) = \infty$. #

Aber für $p \in \mathbb{Z}$ ist $\{p\mathbb{Z}\} = V_m(p\mathbb{Z})$ also $\{p\mathbb{Z}\} = \overline{\{p\mathbb{Z}\}}$, also hat $\operatorname{Specm}(\mathbb{Z})$ keinen generischen Punkt, also $\operatorname{Specm}(\mathbb{Z})$ nicht nüchtern. $\square$

(die hatte ich schon gemacht bevor die Vor. an A verschärft wurden. Argument funktioniert für $\mathbb{C}[X]$ aber genauso, da $\mathbb{C}[X]$ HIR also auch $\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[X]) = \operatorname{Specm}(\mathbb{C}[X]) \cup \{(0)\}$.)