Aufgabe	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1. a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ abzählbar. Beh.: $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ und $\lambda(A) = 0$.

Beweis. Zunächst sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $\{x\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, da abgeschlossen. Betrachte nun

$$A_n := [x, x + \frac{1}{n}) \downarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x\}.$$

Da A_n linksgeschlossene Intervalle für $n \in \mathbb{N}$, ist $\lambda([x, x + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$. Damit folgt, da λ Maß

$$0 = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \to \infty} \lambda(A_n) = \lambda(\{x\}).$$

Sei nun $(q_i)_{i \in I}$ Abzählung von A mit $I \subseteq \mathbb{N}$ und $q_i \neq q_j$ für $i \neq j$ und $q_i \in A$. Dann ist

$$A = \dot{\bigcup_{i \in I}} \{q_i\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

Weiter gilt mit σ-Additivität von λ und der Vorüberlegung:

$$\lambda(A) = \lambda\left(\dot{\bigcup_{i \in I}} \{q_i\}\right) = \sum_{i \in I} \lambda(\{q_i\}) = \sum_{i \in I} 0 = 0.$$

□

b) Sei $\alpha > 0$. Beh.: $\alpha A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ und $\lambda(\alpha A) = \alpha \lambda(A)$.

Beweis. Betrachte

$$\mathscr{D} = \{A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \mid \alpha A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}.$$

Dann ist $\mathscr{D}$ Dynkinsystem, denn

(i) $\mathbb{R} \in \mathscr{D}$, denn $\alpha \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

(ii) Sei $A \in \mathscr{D}$. Dann ist $\alpha A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, also

$$\alpha A^c = (\alpha A)^c \in \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

Also $A^c \in \mathscr{D}$.

(iii) Sei $A_i \in \mathscr{D}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$. Dann ist

$$\alpha \dot{\bigcup_{i \in \mathbb{N}}} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{\alpha A_i}_{\in \mathscr{B}(\mathbb{R})} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

Also $\dot{\bigcup}_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathscr{D}$.

Sei $\mathscr{J} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R})$ die Menge der linksgeschlossenen Intervalle. Es ist offensichtlich $\mathscr{J} \subseteq \mathscr{D}$ und $\mathscr{J}$ π-System. Da auch $\sigma(\mathscr{J}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ folgt mit ÜB 1, dass

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathscr{J}) \subseteq \mathscr{D}.$$

Es ist $f_\alpha \colon \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $A \mapsto \alpha A$ eine inklusionserhaltende Bijektion. Das heißt, die Disjunktheit von Mengen bleibt erhalten $(*)$. Damit ist

$$\mathscr{H} = \{A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \mid \lambda(\alpha A) = \alpha \lambda(A)\}$$

ein Dynkinsystem, denn

(i) $\mathbb{R} \in \mathscr{H}$, denn $\lambda(\mathbb{R}) = \lambda(\alpha \mathbb{R}) = \alpha \lambda(\mathbb{R})$.

(ii) Sei $A \in \mathscr{H}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\alpha\lambda(A^c) &= \alpha\left[\lambda(\mathbb{R}) - \lambda(A)\right] \\ &= \lambda(\alpha\mathbb{R}) - \lambda(\alpha A) \\ &= \lambda((\alpha A)^c \\ &= \lambda(\alpha A^c).\end{aligned}$$

Also $A^c \in \mathscr{H}$.

(iii) Seien $A_i \in \mathscr{H}$ $\forall i \in \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Dann ist

$$\begin{aligned}\lambda\left(\alpha \dot{\bigcup_{i\in\mathbb{N}}} A_i\right) &\overset{(*)}{=} \lambda\left(\dot{\bigcup_{i\in\mathbb{N}}} \alpha A_i\right) \\ &\overset{\lambda \text{ Maß}}{=} \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(\alpha A_i) \\ &\overset{A_i\in\mathscr{H}}{=} \alpha \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(A_i) \\ &= \alpha \dot{\bigcup_{i\in\mathbb{N}}} A_i.\end{aligned}$$

Für $I \in \mathscr{J}$ gilt offensichtlich für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \geq a$:

$$\lambda(\alpha I) = \lambda(\alpha[a,b)) = \lambda([\alpha a, \alpha b)) = |\alpha a - \alpha b| = \alpha|a-b| = \alpha\lambda([a,b)) = \alpha\lambda(I).$$

Also $\mathscr{J} \subseteq \mathscr{H}$. Dann folgt analog zu oben $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{H}$. □

c) Beh.: Für alle $\alpha > 0$ existiert eine Menge $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, s.d. A dicht in $\mathbb{R}$ und $\lambda(A) = \alpha$.

Beweis. Sei $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$ und sei o.E. $q_1 = 1$. Dann betrachte

$$A := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left[q_k - \frac{1}{2^k}, q_k + \frac{1}{2^k}\right].$$

Es ist $Q \subseteq A$, d.h. A dicht in $\mathbb{R}$, da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$.
Da $q_1 = 1$ ist $\left[1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \subseteq A$. Es ist wegen der Translationsinvarianz von λ weiter: $\lambda\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right) = \lambda([0,1]) = 1$. Wegen der Monotonie von λ folgt damit $\lambda(A) \geq 1$. Weiter ist λ σ-subadditiv. Damit folgt

$$\begin{aligned}\lambda(A) &\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda\left(\left[q_k - \frac{1}{2^k}, q_k + \frac{1}{2^k}\right]\right) \\ &\overset{\text{Translat.inv.}}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda\left(\left[0, \frac{1}{2^{k-1}}\right]\right) \\ &\overset{\text{(b)}}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{k-1}} \lambda(2^{k-1}[0, \frac{1}{2^{k-1}}]) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{k-1}} \lambda([0,1]) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &\overset{\text{geom. Reihe}}{<} \infty.\end{aligned}$$

Es ist also $1 \leq \lambda(A) < \infty$, es ex. also ein $a \in \mathbb{R}$, s.d. $\lambda(A) = a$. Wähle nun $\beta := \frac{\alpha}{a}$. Damit folgt mit $B := \beta A$

$$\lambda(B) = \lambda(\beta A) = \beta\lambda(A) = \beta a = \alpha.$$

□

Aufgabe 2. a) Beh.: $\mathscr{H}^s$ ist ein äußeres Maß.

Beweis. (i) Es ist offensichtlich $\mathscr{H}^s(\emptyset) = 0$.

(ii) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mit $A \subseteq B$, dann ist jede Überdeckung von B auch eine Überdeckung von A. Damit folgt die Behauptung.

(iii) Sei $A_i \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ für $i \in \mathbb{N}$. Dann sei $\delta > 0$ und für $i \in \mathbb{N}$ $(B_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von A_i, s.d.

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_{ij})^s = \mathscr{H}^s_\delta(A_i).$$

Dann ist

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \subseteq \bigcup_{i,j\in\mathbb{N}} B_{ij}.$$

Also folgt

$$\mathscr{H}^s_\delta\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \le \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_{ij})^s = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{H}^s_\delta(A_i).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}^s\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) &= \limsup_{\delta\to 0} \mathscr{H}^s_\delta\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \\
&\ge \limsup_{\delta\to 0} \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{H}^s_\delta(A_i) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \limsup_{\delta\to 0} \mathscr{H}^s_\delta(A_i) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{H}^s(A).
\end{aligned}$$

□

b) Beh.: $\mathscr{H}^s(\alpha A) = \alpha^s \mathscr{H}^s(A)$.

Beweis. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $\alpha > 0$. f_α ist eine inklusionserhaltende Bijektion. Damit ist für $B_j \subseteq \mathbb{R}$:

$$A \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j \iff \alpha A \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \alpha B_j.$$

Da offensichtlich $\operatorname{diam}(\alpha A) = \alpha \operatorname{diam}(A)$ und wegen $\alpha > 0$: $\operatorname{diam}(B_j) \le \delta \iff \operatorname{diam}(\alpha B_j) = \alpha \operatorname{diam}(B_j) \le \alpha\delta$, folgt die Behauptung aus der Definition. □

c) Beh.: $\mathscr{H}^s(A + y) = \mathscr{H}^s(A)\ \forall A \subseteq \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$.

Beweis. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $y \in R$. Es ist analog zu A1 $f_y\colon \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}(\mathbb{R}), A \mapsto A + y$ inklusionserhaltende Bijektion. Außerdem ist $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(A + y)$. Damit folgt die Behauptung aus der Definition analog zu (b). □

d) Beh.: $\mathscr{H}^0$ ist das Zählmaß.

Beweis. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ endlich. Dann ex. ein $I \subsetneq \mathbb{N}$, s.d. $A = (a_i)_{i\in I}$. Es ist weiter

$$A = \bigcup_{i\in I} \{a_i\}.$$

mit $\operatorname{diam}(\{a_i\}) = 0$ für $i \in I$. Damit folgt

$$\sum_{i\in I} \operatorname{diam}(\{a_i\})^0 = |I| = \#A.$$

Also für $\delta \to 0$ ist $\mathscr{H}^0_\delta(A) = \#A$, also $\mathscr{H}^0(A) = \#A$. Wegen der Monotonie von $\mathscr{H}^0$ ist für $B \subseteq \mathbb{R}$ unendlich, $\mathscr{H}^0(B) = \infty$. □

Aufgabe 3. a) Beh.: ν äußeres Maß.

Beweis. (i) $\nu(\emptyset) = 0$, da $\emptyset$ endlich.

(ii) Seien $A, B \subseteq \mathscr{P}(X)$ und $A \subseteq B$. Falls $\nu(B) = 1$: trivial. Sei also $\nu(B) = 0$. Dann ist B höchstens abzählbar, also A ebenfalls und es folgt

$$\nu(A) = 0 = \nu(B).$$

(iii) Sei $A_k \in \mathscr{P}(X)$ für $k \in \mathbb{N}$. Falls ein $n \in \mathbb{N}$ ex., s.d. A_k überabzählbar, ist auch $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ überabzählbar, also

$$\nu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = 1 \leq \underbrace{\nu(A_n)}_{=1} + \underbrace{\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\neq n}} \nu(A_k)}_{\geq 0} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \nu(A_k).$$

Falls $\forall k \in \mathbb{N}\colon$ A_k höchstens abzählbar, dann ist $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ höchstens abzählbar und es gilt

$$\nu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = 0 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \nu(A_k).$$

□

b) Sei $\mathscr{M} := \{A \in \mathscr{P}(X) \mid \nu(E) = \nu(E\cap A) + \nu(E \cap A^c) \quad \forall E \in \mathscr{P}(X)\}$.
Beh.: $\mathscr{M} = \{A \in \mathscr{P}(X) \mid A$ höchstens abzählbar oder A^c höchstens abzählbar$\} =: \mathscr{F}$

Beweis. Falls X abzählbar, dann ist $\nu(A) = 0\ \forall A \in \mathscr{P}(X)$, also trivialerweise $\mathscr{M} = \mathscr{P}(X) = \mathscr{F}$.
Sei also X überabzählbar.

- „$\subseteq$": Sei $A \in \mathscr{M}$. Falls A höchstens abzählbar, folgt direkt $A \in \mathscr{F}$. Sei also A überabzählbar. Dann ist mit $E = X$:

$$1 = \nu(X) = \nu(X\cap A) + \nu(X\cap A^c) = \underbrace{\nu(A)}_{=1} + \nu(A^c) = 1 + \nu(A^c).$$

  Also $\nu(A^c) = 0$, also A^c höchstens abzählbar und damit $A \in \mathscr{F}$, also $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{F}$.

- „$\supseteq$": Sei $A \in \mathscr{F}$ und $E \subseteq X$ beliebig. Falls A und E höchstens abzählbar sind $E \cap A$ und $E \cap A^c$ ebenfalls höchstens abzählbar, also folgt

$$\nu(E) = 0 = \nu(E\cap A) + \nu(E\cap A^c) \implies A \in \mathscr{M}.$$

  Falls A höchstens abzählbar und E überabzählbar folgt mit der Subadditivität von ν:

$$1 = \nu(E) \leq \underbrace{\nu(E\cap A)}_{\substack{=0\\ \text{da } A \text{ abzählbar}}} + \underbrace{\nu(E\cap A^c)}_{\leq 1}.$$

  Also folgt $\nu(E\cap A^c) = 1$ und damit $A \in \mathscr{M}$.
  Falls A überabzählbar und E höchstens abzählbar sind $E\cap A$ und $E\cap A^c$ ebenfalls höchstens abzählbar, also $A \in \mathscr{M}$.
  Falls A und E überabzählbar ist A^c höchstens abzählbar, da $A \in \mathscr{F}$ und damit wegen Subadditivität von ν:

$$1 = \nu(E) \leq \underbrace{\nu(E\cap A)}_{\leq 1} + \underbrace{\nu(E\cap A^c)}_{=0} \implies \nu(E\cap A) = 1 \implies A \in \mathscr{M}.$$

  Also insgesamt $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{M}$.

□

Aufgabe 4. Beh.: μ ist weder Maß noch äußeres Maß.

Beweis. Betrachte $A_n := \{n\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\} = \mathbb{N}.$$

Dann ist für $k \in \mathbb{N}$:

$$\mu(A_k) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#(\{k\} \cap \{1, \ldots, n\}) = 0,$$

aber

$$\mu(\mathbb{N}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#(\mathbb{N} \cap \{1, \ldots, n\}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1 > \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Also ist μ nicht subadditiv, also weder Maß noch äußeres Maß. $\square$