

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	Σ
Punkte					

Aufgabe 1. Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

- „ $\implies$ “: Sei Ω n -dimensionale C^1 -Mannigfaltigkeit der Dimension n und $x \in M$ beliebig. Dann ex. eine Umgebung $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ von x und eine Abbildung $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^0)$, mit $f^{-1}(0) = M \cap \Omega$. Da $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ folgt

$$M \cap \Omega = f^{-1}(0) = \Omega.$$

Also folgt $\Omega \subseteq M$. Da Ω Umgebung, ex. ein $\epsilon > 0$, s.d. $B_\epsilon(x) \subseteq \Omega \subseteq M$. Da x beliebig, folgt M offen.

- „ $\impliedby$ “: Sei Ω offen und $x \in M$ beliebig. Dann $\exists \epsilon > 0$, s.d. $B_\epsilon(x) \subseteq M$. Setze $\Omega := B_\epsilon(x)$. Dann ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von x . Setze weiter $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^0, x \mapsto 0$. Dann ist f konstant, insbesondere $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^0)$ und $f^{-1}(0) = \Omega = M \cap \Omega$, da $\Omega \subseteq M$. Außerdem ist $Df(x) = 0 \forall x \in \Omega$, also $\text{rang} Df(x) = 0 = n - n \forall x \in \Omega$. Also M C^1 -Mannigfaltigkeit der Dimension n .

Aufgabe 2. a) Sei $x \in S^{n-1}$. Dann setze $\Omega := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann ist Ω offen, da $\Omega^c = \{0\}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$. Außerdem ist $x \neq 0$, also $x \in \Omega$ und damit Ω Umgebung von x .

Setze weiter $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) := |x| - 1$. Dann gilt, da $0 \notin S^{n-1}$:

$$f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\} = S^{n-1} = S^{n-1} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = S^{n-1} \cap \Omega.$$

Außerdem ist für $x \in \Omega$: $f(x) = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} - 1$ als Komposition differenzierbarer Abbildungen differenzierbar auf Ω . Außerdem ist für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $x \in \Omega$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \frac{x_i}{|x|}$$

stetig also $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ und

$$Df(x) = \frac{x^t}{|x|} \neq 0.$$

Dann folgt also $\text{rang} Df(x) = 1 \forall x \in \Omega$.

Also folgt S^{n-1} $n - 1$ -dimensionale C^1 -Mfkt.

- b) Sei $x \in K^{n-1} \setminus \{0\}$. Dann setze $\Omega := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann ist analog zu (a), Ω eine Umgebung von x . Setze weiter $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=1}^{x_k^2} - x_n^2$. Dann ist f differenzierbar und für $i \in \{1, \dots, n-1\}$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 2x_i \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = -2x_n.$$

Also folgt

$$Df(x) = 2 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & -x_n \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Also $\text{rang} Df(x) = 1 \forall x \in \Omega$. Zuletzt gilt

$$f^{-1}(0) = K^{n-1} \setminus \{0\} = (K^{n-1} \setminus \{0\}) \cap \Omega.$$

Also ist K^{n-1} eine $n - 1$ dim. C^1 -Mfkt.

- c) Ang.: K^{n-1} ist eine C^1 -Mfkt. Dann betrachte $x := 0$. Dann ex. eine Umgebung $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ von x und $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ und ein $g \in C^1(U, \mathbb{R}^1)$ mit $K^{n-1} \cap \Omega = \pi(\text{graph } g)$. Da Ω Umgebung von x , ex. ein $\epsilon > 0$, s.d. $B_\epsilon(0) \subseteq \Omega$.

Setze nun $a := \frac{\epsilon}{2}$ und $b := \sqrt{\frac{a^2}{n-1}}$. Für $z \in \pi(\text{graph } g)$ ex. ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $z_k = g(z_1, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n)$. Dann setze für $i \in \{1, \dots, n-1\}$: $y_i := b$ und $y_n := a$. Setze nun

$$\tilde{y}_i := \begin{cases} y_i & i \neq k \\ -y_i & i = k \end{cases} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Dann folgt da $\tilde{y}_i^2 = y_i^2 \forall i \in \{1, \dots, n\}$:

$$|y| = |\tilde{y}| = \sqrt{(n-1)b^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} < \epsilon.$$

Außerdem

$$\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{y}_i^2 = (n-1)b^2 = a^2 = y_n^2 = \tilde{y}_n^2.$$

Also ist $y, \tilde{y} \in \Omega \cap K^{n-1}$. Sei nun nach Umnummerierung der Koordinaten o.E. $k = n$. Dann ex. ein $u \in U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, s.d. $(u, g(u)) = y$. Das heißt $u_1, \dots, u_{n-1} = b$ und $g(u) = a$. Aber da $\tilde{y} \in K^{n-1} \cap \Omega$ ist auch $(u, -a) \in \text{graph } g$, insbesondere folgt

$$-a = g(u) = a$$

aber das ist ein Widerspruch zu g Abbildung.

Aufgabe 3. a) Sei $v \in T_\xi M$. Dann ex. $\gamma \in C^1((-\epsilon, \epsilon), M)$ mit $\gamma(0) = \xi$ und $\gamma'(0) = v$. Dann ist $F \circ \gamma(0) = F(\xi)$. Es gilt $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon): \gamma(t) \in M$. Da $B_r(\xi)$ offen und $\gamma \in C^1((-\epsilon, \epsilon), M)$ ex. ein $0 < \delta < \epsilon$, s.d. $\forall t \in (-\delta, \delta): \gamma(t) \in M \cap B_r(\xi)$. Also gilt $\forall t \in (-\delta, \delta): F \circ \gamma(t) \geq F \circ \gamma(0)$. Also ist 0 ein lokales Minimum von $F \circ \gamma$. Damit folgt mit der Kettenregel

$$0 = (F \circ \gamma)'(0) = (DF)(\xi)\gamma'(0) = (\nabla F)(\xi)^t v = \langle \nabla F(\xi), v \rangle.$$

Also folgt $\nabla F(\xi) \in T_\xi M^\perp = N_\xi M$.

b) Das gegebene f erfüllt gerade die Eigenschaften aus Satz 5.6, d.h. es folgt $N_\xi M = \text{span}\langle \nabla f_1(\xi), \dots, \nabla f_{m-n}(\xi) \rangle$. Da nach (a) $\nabla F(\xi) \in N_\xi M$, ex. also $y_i \in \mathbb{R}$ s.d.

$$\nabla F(\xi) = \sum_{i=1}^{m-n} y_i \nabla f_i(\xi).$$

Aufgabe 4. Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $\lambda > 0$. Dann ist $\hat{f} \in \mathbb{R}$ und für ein beliebiges Polynom $p \in C^\infty(\mathbb{R})$ auch $p\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ nach Definition von $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Falls $p(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ ist ebenfalls $\frac{\hat{f}}{p} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Mit Quotientenregel folgt, dass

$$\frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\hat{f}(x)}{-x^2 - \lambda} \right) = \frac{\sum_{k=1}^s p_k(x) \frac{d^k}{dx^k} \hat{f}(x)}{(-x^2 - \lambda)^{2k}} \quad (1)$$

für Polynome $p_k \in C^\infty$. Da $(-x^2 - \lambda)^k \neq 0$ für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$, folgt mit (1), dass

$$\frac{\hat{f}}{-x^2 - \lambda} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Setze nun $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u(x) := \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\hat{f}}{-x^2 - \lambda} \right) (x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und es gilt:

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\hat{f}}{-x^2 - \lambda} \right) (x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ \xLeftrightarrow[\mathcal{F} \text{ inj.}]{} & \hat{u}(x) = \frac{\hat{f}}{-x^2 - \lambda} & \forall x \in \mathbb{R} \\ \xLeftrightarrow[-x^2 - \lambda \neq 0]{} & \hat{u}(x)(-x^2 - \lambda) = \hat{f}(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ \iff & ix\hat{u}'(x) - \lambda\hat{u}(x) = \hat{f}(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ \iff & \hat{u}''(x) - \lambda\hat{u}(x) = \hat{f}(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ \iff & \mathcal{F}(u'' - \lambda u)(x) = \mathcal{F}f(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ \xLeftrightarrow[\mathcal{F} \text{ inj.}]{} & u''(x) - \lambda u(x) = f(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Das zeigt die Existenz und die Eindeutigkeit.