Aufgabe	A1	A2	A3	$\sum$
Punkte				

Aufgabe 1. Es ist $F := \frac{1}{1+x^2} \in L^1((0,1))$, da F auf dem beschränkten Intervall $(0,1)$ beschränkt. Dann gilt mit dem Diffeomorphismus $t\colon (0, \frac{\pi}{4}) \to (0,1)$ mit $t(x) := \tan(x)$ für $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ und $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ mit dem Transformationssatz:

$$\int_{(0,1)} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} \qquad (*).$$

Es ist g stetig in beiden Koordinaten, insbesondere messbar und R-integrierbar mit Hauptsatz. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int_{(0,1)} \int_{(0,1)} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= -\int_{(0,1)} \int_{(0,1)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= -\int_{(0,1)} \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y \\
&\overset{(*)}{=} -\frac{\pi}{4} \\
&\neq \frac{\pi}{4} \\
&\overset{(*)}{=} \int_{(0,1)} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{(0,1)} \int_{(0,1)} \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{(0,1)} \int_{(0,1)} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Die beiden Integrale stimmen nicht überein, da $g(x,y) \notin L^1((0,1)\times(0,1))$, denn

$$\begin{aligned}
\int_{(0,1)\times(0,1)} |g(x,y)|\,\mathrm{d}(x,y) &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{(0,1)} \int_{(0,1)} \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{(0,1)} \left[-\int_{(0,y]} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x + \int_{(y,1)} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \\
&= \int_{(0,1)} \left[\frac{y}{2y^2} - \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{y}{2y^2} \right) \right] \mathrm{d}y \\
&= \int_{(0,1)} \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y - \int_{(0,1)} \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{mon. Konv.}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{[\frac{1}{n},1)} \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y - \frac{\pi}{4} \\
&= -\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{\pi}{4} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. a) Es ist $(\sqrt{r^2-1})((1,\infty)) = (0,\infty)$, $(rt\sin(s))(U) = \mathbb{R}$ und $(rt\cos(s))(U) = \mathbb{R}$. sin und cos haben keine gemeinsamen Nullstellen und $r,t \neq 0$ für $(r,t,s) \in U$, also folgt

$$\Phi(U) = \{x \in \mathbb{R}^2 \times (0,\infty) \mid x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0\}.$$

Durch Rechnung folgt

$$D\Phi = \begin{pmatrix} t\cos(s) & -rt\sin(s) & r\cos(s) \\ t\sin(s) & rt\cos(s) & r\sin(s) \\ \frac{r}{\sqrt{r^2-1}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(D\Phi) = -\frac{r^3 t}{\sqrt{r^2-1}}.$$

b) Es ist $D\Phi$ auf ganz U definiert und stetig, also $\Phi \in C^1(U)$. Betrachte $\Psi\colon \Phi(U) \to U$ mit

$$\Psi(u,v,w) = \begin{pmatrix} \sqrt{w^2+1} \\ \arccos\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) \\ \sqrt{\frac{u^2+v^2}{w^2+1}} \end{pmatrix}.$$

Kurze Rechnung ergibt $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$ und $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$. Also folgt Φ bijektiv und $\Phi^{-1} = \Psi$. Es ist außerdem Φ^{-1} stetig partiell differenzierbar, als Verkettung stetig partiell differenzierbarer Funktionen. Also $\Phi^{-1} \in C^1(\Phi(U))$. Insgesamt folgt, dass Φ ein C^1-Diffeomorphismus ist.

c) Es ist

$$\begin{aligned} H &= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon x_3 \in [0,2], \frac{1}{2}(1+x_3^2) \le x_1^2 + x_2^2 \le 2(1+x_3^2)\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon (r,t,s) := \Phi^{-1}(x), \sqrt{r^2-1} \in [0,1], \frac{1}{2}r^2 \le r^2t^2 \le 2r^2\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon (r,t,s) := \Phi^{-1}(x), r \in [1,\sqrt{5}], \frac{1}{2} \le t^2 \le 2\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon (r,t,s) := \Phi^{-1}(x), r \in [1,\sqrt{5}], t \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right]\right\} \end{aligned}$$

Damit folgt jetzt direkt

$$\Phi^{-1}(H) = \left\{(r,t,s) \in U \colon r \in [1,\sqrt{5}], t \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right]\right\}.$$

d) Zunächst gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(s)\,\mathrm{d}s = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Damit folgt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2(s)+\sin^2(s))\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}s = \pi \qquad (*).$$

Es ist H beschränkt, also $\mathscr{L}^3(H) < \infty$ und mit $F(x) := x_1^2 x_3$ ist $|F|$ beschränkt auf H, also $F \in L^1(H)$. Also folgt mit den Ergebnissen aus a) bis c) und dem Transformationssatz

$$\begin{aligned} \int_H x_1^2 x_3\,\mathrm{d}x &= \int_{\Phi(\Phi^{-1}(H))} F\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Trafo}}{=} \int_{\Phi^{-1}(H)} (F\circ\Phi)|\det(D\Phi)|\,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_1^{\sqrt{5}} \mathrm{d}r \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}s \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \mathrm{d}t\, \frac{r^5 t^3 \cos^2(s)\sqrt{r^2-1}}{\sqrt{r^2-1}} \\ &\overset{(*)}{=} \frac{155}{8}\pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Definiere $h(x,y) := f(x)g(y)$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$. Es ist h messbar, da f und g messbar. Also gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2n}} |h(x,y)|\,\mathrm{d}(x,y) &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |h(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||g(x)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\overset{f,g\in L^1(\mathbb{R}^n)}{<} \infty. \end{aligned}$$

Also folgt $h \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$. Außerdem gilt für $x \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x,y)| \, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||g(y)| \, \mathrm{d}y = |f(x)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \, \mathrm{d}y < \infty.$$

Also mit $g_x \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $y \mapsto h(x,y)$ ist auch $g_x \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Damit folgt nun

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, \mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x) \, \mathrm{d}x\right) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} h(x,y) \, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Trafo}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} h(x,y-x) \, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} h(x,y-x) \, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y-x) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(y) \, \mathrm{d}y \, .
\end{aligned}$$

Das zeigt alle Behauptungen.