
Aufgabe 1.

Aufgabe 2 (Vektorprodukte). Sei $k \in \mathbb{R}$ beliebig, dann wähle $x := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}k \\ -1 \\ k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Beweis.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}k \\ -1 \\ k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 0k \\ 5k - (2(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}k)) \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

□

Es existiert kein $y \in \mathbb{R}^3$ mit:

$$y \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Die obenstehende Gleichung ergibt folgendes LGS:

$$\begin{aligned} 2y_2 - y_3 &= 1 \\ 2y_3 - 2y_1 &= 2 \\ y_1 - 2y_2 &= 0 \end{aligned}$$

.

Aus (I) folgt:

$$y_3 = 2y_2 - 1.$$

Damit ergibt sich aus (II):

$$\begin{aligned} 2y_3 - 2y_1 &= 2(2y_2 - 1) - 2y_1 = 2 \\ \implies y_1 &= 2y_2 - 2 \end{aligned}$$

.

Daraus entsteht ein Widerspruch in (III):

$$y_1 - 2y_2 = 2y_2 - 2 - 2y_2 = -2 \neq 0.$$

□

Aufgabe 3. Wir definieren die Abbildung $-\perp : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^\perp = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

a) Zu zeigen: $x \perp x^\perp$ und $\|x\| = \|x^\perp\| \forall x \in \mathbb{R}^2$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}^2$ beliebig. $x \perp x^\perp$:

$$\langle x, x^\perp \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \right\rangle = -x_1x_2 + x_2x_1 = 0.$$

$\|x\| = \|x^\perp\|$:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{(-x_2)^2 + x_1^2} = \|x^\perp\|.$$

□

b) Ist $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $y \in \mathbb{R}^2$ mit $x \perp y$, so existiert ein $a \in \mathbb{R}$ derart, dass $y = a \cdot x^\perp$.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $y \in \mathbb{R}^2$ mit $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Wegen $x \perp y$ folgt:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0 \implies x_1 y_1 = -x_2 y_2.$$

Fall 1: $x_1 = 0. \implies x_2 \neq 0.$

$$x_2 y_2 = 0 \implies y_2 = 0.$$

Wähle nun $a := -\frac{y_1}{x_2} \in \mathbb{R}$:

$$y = a \cdot x^\perp = \begin{pmatrix} -ax_2 \\ ax_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{x_2} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Fall 2: $x_2 = 0. \implies x_1 \neq 0.$

$$x_1 y_1 = 0 \implies y_1 = 0.$$

Wähle nun $a := \frac{y_2}{x_1} \in \mathbb{R}$:

$$y = a \cdot x^\perp = \begin{pmatrix} -ax_2 \\ ax_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{y_2}{x_1} x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Fall 3: $x_1 \neq 0$ und $x_2 \neq 0.$

$$-\frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2}{x_1}.$$

Wähle nun $a := \frac{y_2}{x_1} = -\frac{y_1}{x_2} \in \mathbb{R}$:

$$y = a \cdot x^\perp = \begin{pmatrix} -ax_2 \\ ax_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{x_2} x_2 \\ \frac{y_2}{x_1} x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

□

c) Für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sei $f_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Abbildung mit:

$$y \mapsto \frac{\langle y, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \cdot x + \frac{\langle y, x^\perp \rangle}{\langle x, x \rangle} \cdot x^\perp.$$

Zu zeigen: Für beliebiges $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist f_x gleich der Identität des $\mathbb{R}^2$.

Beweis. Zz: $f_x(y) = y \forall y \in \mathbb{R}^2$

Seien $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $y \in \mathbb{R}^2$ mit $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Nun:

$$\begin{aligned} f_x(y) &= \frac{\langle y, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \cdot x + \frac{\langle y, x^\perp \rangle}{\langle x, x \rangle} \cdot x^\perp \\ &= \frac{1}{\langle x, x \rangle} \left(\begin{pmatrix} x_1^2 y_1 + x_1 x_2 y_2 \\ x_1 x_2 y_1 + x_2^2 y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 x_2^2 - x_1 x_2 y_2 \\ -x_1 x_2 y_1 + x_1^2 y_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{\langle x, x \rangle} \begin{pmatrix} y_1 x_1^2 + y_1 x_2^2 \\ y_2 x_2^2 + y_2 x_1^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} y_1 (x_1^2 + x_2^2) \\ y_2 (x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= y. \end{aligned}$$

□