Aufgabe 1 (Homomorphismen)**.** (a) Körperhomomorphismen von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

Es existieren keine Körperhomomorphismen, da $char(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = 3 \neq 5 = char(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$.

(b) Gruppenhomomorphismen von $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$

Die Gruppe $\left((\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times, \cdot, \overline{1}_3\right)$ hat genau zwei Elemente, nämlich $\left\{\overline{1}_3, \overline{2}_3\right\}$ und die Gruppe $\left((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times, \cdot, \overline{1}_5\right)$ hat genau 4 Elemente, nämlich $\left\{\overline{1}_5, \overline{2}_5, \overline{3}_5, \overline{4}_5\right\}$. Damit $\varphi : (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$ Gruppenhomomorphismus, muss gelten:

$$\begin{aligned} \varphi\left(\overline{1}_3\right) &= \overline{1}_5 \\ \varphi\left(\overline{2}_3^{-1}\right) &= \varphi\left(\overline{2}_3\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Da $\overline{2}_3^{-1} = \overline{2}_3$ folgt:

$$\varphi\left(\overline{2}_3\right) = \varphi\left(\overline{2}_3\right)^{-1}.$$

Wegen $\overline{2}_5^{-1} = \overline{3}_5$ und $\overline{1}_5^{-1} = \overline{1}_5$ und $\overline{4}_5^{-1} = \overline{4}_5$ bleiben für $\varphi\left(\overline{2}_3\right)$ nur zwei Möglichkeiten: $\varphi\left(\overline{2}_3\right) = \overline{1}_5$ und $\varphi\left(\overline{2}_3\right) = \overline{4}_5$.

Das heißt es existieren zwei Gruppenhomomorphismen von $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$:

Der triviale Homomorphismus mit:

$$\varphi_1(A) = \overline{1}_5 \text{ für alle } A \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times.$$

und

$$\varphi_2(A) = \begin{cases} \overline{1}_5 & \text{für } A = \overline{1}_3 \\ \overline{4}_5 & \text{für } A = \overline{2}_3 \end{cases}.$$

Der triviale Homomorphismus ist immer Gruppenhomomorphismus, bleibt zu zeigen, dass φ_2 auch Gruppenhomomorphismus ist.

Beweis: φ_2 ist Gruppenhomomorphismus. Seien $A, B \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times$.

Falls $A = B = \overline{1}_3$:

$$\varphi_2\left(\overline{1}_3 \cdot \overline{1}_3\right) = \varphi_2\left(\overline{1}_3\right) = \overline{1}_5 = \overline{1}_5 \cdot \overline{1}_5 = \varphi_2\left(\overline{1}_3\right) \cdot \varphi_2\left(\overline{1}_3\right).$$

Falls $A = B = \overline{2}_3$:

$$\varphi_2\left(\overline{2}_3 \cdot \overline{2}_3\right) = \varphi_2\left(\overline{1}_3\right) = \overline{1}_5 = \overline{4}_5 \cdot \overline{4}_5 = \varphi_2\left(\overline{2}_3\right) \cdot \varphi_2\left(\overline{2}_3\right).$$

Falls $A = \overline{1}_3$ und $B = \overline{2}_3$:

$$\varphi_2\left(\overline{1}_3 \cdot \overline{2}_3\right) = \varphi_2\left(\overline{2}_3\right) = \overline{4}_5 = \overline{1}_5 \cdot \overline{4}_5 = \varphi_2\left(\overline{1}_3\right) \cdot \varphi_2\left(\overline{2}_3\right).$$

Analog folgt dies für $A = \overline{2}_3$ und $B = \overline{1}_3$. □

Aufgabe 2 (Vektorprodukte)**.** Sei $k \in \mathbb{R}$ beliebig, dann wähle $x := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}k \\ -1 \\ k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Beweis.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}k \\ -1 \\ k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 0k \\ 5k - \left(2\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}k\right)\right) \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

□

Es existiert kein $y \in \mathbb{R}^3$ mit:

$$y \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Die obenstehende Gleichung ergibt folgendes LGS:

$$2y_2 - y_3 = 1$$
$$2y_3 - 2y_1 = 2$$
$$y_1 - 2y_2 = 0$$
$$.$$

Aus (I) folgt:

$$y_3 = 2y_2 - 1.$$

Damit ergibt sich aus (II):

$$2y_3 - 2y_1 = 2(2y_2 - 1) - 2y_1 = 2$$
$$\implies \qquad y_1 = 2y_2 - 2$$
$$.$$

Daraus entsteht ein Widerspruch in (III):

$$y_1 - 2y_2 = 2y_2 - 2 - 2y_2 = -2 \neq 0.$$

□

Aufgabe 3. Wir definieren die Abbildung $-^{\perp} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{\perp} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

a) Zu zeigen: $x \perp x^{\perp}$ und $\|x\| = \|x^{\perp}\| \; \forall x \in R^2$

Beweis. Sei $x \in R^2$ beliebig. $x \perp x^{\perp}$:

$$\langle x, x^{\perp} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \right\rangle = -x_1 x_2 + x_2 x_1 = 0.$$

$\|x\| = \|x^{\perp}\|$:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{(-x_2)^2 + x_1^2} = \|x^{\perp}\|.$$

□

b) Ist $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $y \in \mathbb{R}^2$ mit $x \perp y$, so existiert ein $a \in \mathbb{R}$ derart, dass $y = a \cdot x^{\perp}$.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}^2 \setminus$ mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $y \in \mathbb{R}^2$ mit $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Wegen $x \perp y$ folgt:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0 \implies x_1 y_1 = -x_2 y_2.$$

<u>Fall 1:</u> $x_1 = 0. \implies x_2 \neq 0.$

$$x_2 y_2 = 0 \implies y_2 = 0.$$

Wähle nun $a := -\frac{y_1}{x_2} \in \mathbb{R}$:

$$y = a \cdot x^{\perp} \begin{pmatrix} -a x_2 \\ a x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{x_2} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

<u>Fall 2:</u> $x_2 = 0. \implies x_1 \neq 0.$

$$x_1 y_1 = 0 \implies y_1 = 0.$$

Wähle nun $a := \frac{y_2}{x_1} \in \mathbb{R}$:

$$y = a \cdot x^{\perp} \begin{pmatrix} -a x_2 \\ a x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{y_2}{x_1} x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Fall 3: $x_1 \neq 0$ und $x_2 \neq 0$.

$$-\frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2}{x_1}.$$

Wähle nun $a := \frac{y_2}{x_1} = -\frac{y_1}{x_2} \in \mathbb{R}$:

$$y = a \cdot x^\perp = \begin{pmatrix} -ax_2 \\ ax_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{x_2} x_2 \\ \frac{y_2}{x_1} x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

□

c) Für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sei $f_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Abbildung mit:

$$y \mapsto \frac{\langle y, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \cdot x + \frac{\langle y, x^\perp \rangle}{\langle x, x \rangle} \cdot x^\perp.$$

Zu zeigen: Für beliebiges $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f_x gleich der Identität des $\mathbb{R}^2$.

Beweis. Zz: $f_x(y) = y \ \forall y \in \mathbb{R}^2$

Seien $x \in R^2 \setminus \{0\}$ mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $y \in R^2$ mit $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Nun:

$$\begin{aligned}
f_x(y) &= \frac{\langle y, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \cdot x + \frac{\langle y, x^\perp \rangle}{\langle x, x \rangle} \cdot x^\perp \\
&= \frac{1}{\langle x, x \rangle} \left(\begin{pmatrix} x_1^2 y_1 + x_1 x_2 y_2 \\ x_1 x_2 y_1 + x_2^2 y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 x_2^2 - x_1 x_2 y_2 \\ -x_1 x_2 y_1 + x_1^2 y_2 \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{\langle x, x \rangle} \begin{pmatrix} y_1 x_1^2 + y_1 x_2^2 \\ y_2 x_2^2 + y_2 x_1^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} y_1 (x_1^2 + x_2^2) \\ y_2 (x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= y.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 4. Sei $G = (G, \cdot, e))$ eine Gruppe. Für $g \in \mathbb{N}$ sei $c_g : G \to G$ Abbildung mit $c_g(x) = g \cdot x \cdot g^{-1}$.

(a) $c_{g^{-1}} \circ c_g = c_g \circ c_{g^{-1}} = id_G$

Beweis. Sei $x \in G$ beliebig. Dann gilt: $c_g(x) = g \cdot x \cdot g^{-1}$ und $c_{g^{-1}}(x) = g^{-1} \cdot x \cdot g$.
Zu zeigen: $c_{g^{-1}}(c_g(x)) = c_g(c_{g^{-1}}(x)) = x$.

$$\begin{aligned}
c_{g^{-1}}(c_g(x)) &= g^{-1} \cdot (g \cdot x \cdot g^{-1}) \cdot g \\
&= (g^{-1} \cdot g) \cdot x \cdot (g^{-1} \cdot g) \\
&= x \\
&= (g \cdot g^{-1}) \cdot x \cdot (g \cdot g^{-1}) \\
&= g \cdot (g^{-1} \cdot x \cdot g) \cdot g^{-1} \\
&= c_g(c_{g^{-1}}(x)).
\end{aligned}$$

□

(b) c_g ist ein Gruppenisomorphismus

Beweis. Seien $x, y \in G$ beliebig.

(i) Zu zeigen: $c_g(x) \cdot c_g(y) = c_g(x \cdot y)$

$$\begin{aligned} c_g(x) \cdot c_g(y) &= (g \cdot x \cdot g^{-1}) \cdot (g \cdot y \cdot g^{-1}) \\ &= g \cdot x \cdot (g^{-1} \cdot g) \cdot y \cdot g^{-1} \\ &= g \cdot (x \cdot y) \cdot g^{-1} \\ &= c_g(x \cdot y). \end{aligned}$$

$\implies$ c_g ist Gruppenhomomorphismus

(ii) Zu zeigen: c_g ist bijektiv
Injektivität: Seien $x, y \in G$ mit $c_g(x) = c_g(y)$

$$\begin{aligned} c_g(x) = g \cdot x \cdot g^{-1} = g \cdot y \cdot g^{-1} = c_g(y) \\ \stackrel{\text{Kürzung}}{\implies} x = y. \end{aligned}$$

Surjektivität : Sei $c \in G$. Dann wähle $x := g^{-1} \cdot c \cdot g$.

$$\implies c_g(x) = g \cdot (g^{-1} \cdot c \cdot g) \cdot g^{-1} = c.$$

$\implies$ c_g ist bijektiv

$\implies$ c_g ist Gruppenisomorphismus □

(c) Ist $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, so gilt $c_g(ker\varphi) = ker\varphi$.

Beweis. Zu zeigen: $c_g(ker\varphi) = ker\varphi$.

(i) ($\implies$) Sei $x \in c_g(ker\varphi)$. Zu zeigen: $\varphi(x) = e_H$.
$\exists r \in ker\varphi : c_g(r) = x$. Fixiere r. $\implies$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(g \cdot r \cdot g^{-1}) \\ &\stackrel{\varphi \text{ Grp.hom.}}{=} \varphi(g) \cdot \varphi(r) \cdot \varphi(g^{-1}) \\ &= \varphi(g) \cdot e_H \cdot \varphi(g^{-1}) \\ &= \varphi(g) \cdot \varphi(g)^{-1} \\ &= e_H. \end{aligned}$$

(ii) ($\impliedby$) Sei $r \in ker\varphi$. Zu zeigen: $r \in c_g(ker\varphi)$, also $\exists x \in ker\varphi : c_g(x) = r$
Wähle $x := g^{-1} \cdot r \cdot g \in G$. Analog zu (i):

$$\varphi(x) = \varphi(g^{-1}) \cdot \varphi(r) \cdot \varphi(g) = \varphi(g)^{-1} \cdot \varphi(g) = e_x.$$

$\implies$ $x \in ker\varphi$.

$$c_g(x) = g \cdot (g^{-1} \cdot r \cdot g) \cdot g^{-1} = r.$$

$\implies$ $c_g(x) = r$

□

(d) Die Abbildung $c : G \to Aut(G)$ mit $g \mapsto c_g$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Seien $g, h \in G$. c_g ist ein Gruppenautomorphismus, wegen (b) und $c_g : G \to G$. $Aut(G)$ ist Gruppe bezüglich $\circ$.

Zu zeigen: $c(g) \circ c(h) = c(g \cdot h)$, also $\forall r \in G : c_g(c_h(r)) = c_{g \cdot h}(r)$.

Sei $r \in G$ beliebig.

$$\begin{aligned} c_g(c_h(r)) &= g \cdot (h \cdot r \cdot h^{-1}) \cdot g^{-1} \\ &= (g \cdot h) \cdot r \cdot (h^{-1} \cdot g^{-1}) \\ &= (g \cdot h) \cdot r \cdot (g \cdot h)^{-1} \\ &= c_{g \cdot h}(r). \end{aligned}$$

□

(e) c ist nicht notwendig injektiv.

Beweis. Sei G abelsche Gruppe. Dann gilt für alle $x \in G$:

$$c_g(x) = g \cdot x \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot x \cdot g = c_{g^{-1}}(x).$$

Aber im Allgemeinen sind g und g^{-1} nicht immer gleich, das heißt c i.A. nicht injektiv. $\square$