

A1/ (a) $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ Gebiete

(i) Beh. Wahr

Bew. Für $z \in D_1 \cap D_2$ bel. ist $\overline{z z^*} \in D_1$ und $\overline{z z^*} \in D_2$ also $\overline{z z^*} \in D_1 \cap D_2$. Außerdem endl. Schritte offener Mengen offen.

Für $z \in D_1 \cup D_2$ bel. ist $\overline{z z^*} \in D_1$ oder $\overline{z z^*} \in D_2$ also $\overline{z z^*} \in D_1 \cup D_2$. Außerdem Vereinigungen offener Mengen offen. □

(ii) Beh. Die Aussage ist falsch.

Bew. Setze $D_1 := U_1(1)$ und $D_2 := \mathbb{C}^*$. Dann ist $D_1 \subseteq D_2$ und D_1 nach VL Sterngebiet, aber D_2 nach VL kein Sterngebiet. □

(iii) Beh. Wahr

Bew. offene Bälle sind Sterngebiete und Sterngebiete insbes. offen. □

$$\begin{aligned}
 (b) (i) \quad U_1 &:= \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ und } |z+1| > \sqrt{2} \} \\
 &= U_1(0) \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{U_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(-1)}) \\
 &= U_1(0) \setminus \overline{U_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(-1)}
 \end{aligned}$$

Kein Sterngebiet, denn für $z^* \in U_1$ bel. betrachte:

Fall 1: $\operatorname{Im}(z^*) \geq 0$: Es ist $i \in \partial U_1$, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists z \in U_1$ sd.

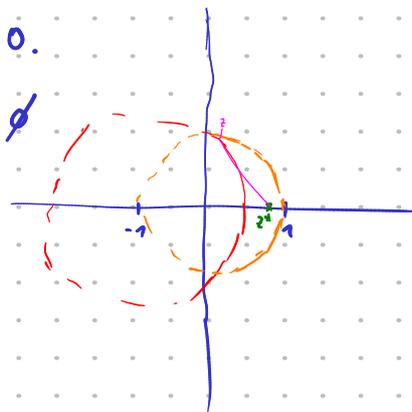
$|z-i| < \varepsilon$. Nun betrachten wir die Schnittpunkte von $\overline{z z^*}$ mit

$\partial U_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(-1)$. Dazu sei OF $\operatorname{Im}(z^*) = 0$, denn sonst projiziere z^* entlang $\overline{z z^*}$ auf die reelle Achse. Falls dadurch neue Schnittpunkte mit $\partial U_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(-1)$ entstehen, wähle z als die Projektion und fertig. Nun sei also $\operatorname{Im}(z^*) > 0$.

Für hinreichend kleines ε ist nun $\partial U_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(-1) \cap \overline{z z^*} \neq \emptyset$

und es folgt die Beh.

Fall 2: $\operatorname{Im}(z^*) < 0$: Analog.



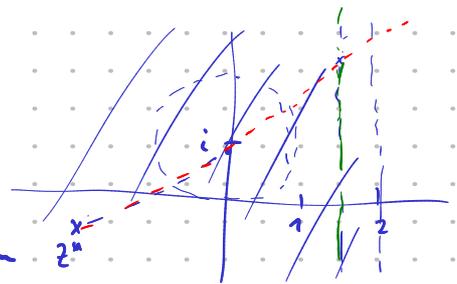
$$(ii) U_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 1 \text{ oder } \operatorname{Im}(z) > 2\}$$

$$= \underbrace{\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 1\}}_{D_1} \cup \underbrace{\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 2\}}_{D_2}$$

Es sind $D_1 = \operatorname{Re}^{-1}((-\infty, 1))$ und $D_2 = \operatorname{Im}^{-1}((2, \infty))$ offen, da $\operatorname{Re}, \operatorname{Im}$ stetig. Außerdem sind D_1 und D_2 als offene Rechtecke konvex und damit Sterngebiete, wobei jeder Punkt Sternmittelpunkt ist. Also insbes. $-2 + 3i \in D_1 \cap D_2$. Also U_2 Sterngebiet nach (a)(i).

$$(iii) U_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 2 \text{ und } |z - i| > 1\}$$

Kein Sterngebiet, denn für $z^* \in U_3$ bel. sei z der Schnittpunkt der von der Strecke $\overline{z^* i}$ induzierten



Geraden mit der Geraden $\left\{ \frac{z}{2} + it \mid t \in \mathbb{R} \right\}$. Dann ist $z \in U_3$ (Skizze) aber nach Konstruktion liegt i auf $\overline{z^* z}$ also $\overline{z^* z} \notin U_3$.

□

A2 | $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Beh., $\bar{\cdot} : D \rightarrow \mathbb{C}$ hat keine Stamm-fkt auf D .

Beweis. Da jede nichtleere offene TM einen inneren Punkt enthält genügt es die Aussage

für offene Umgebungen zu zeigen. Sei also $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ bel. Dann setze $r := \frac{\varepsilon}{2} > 0$

$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow B_\varepsilon(z_0)$, $\varphi \mapsto r e^{i\varphi} + z_0$. Dann ist $\gamma'(\varphi) = r i e^{i\varphi} \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]$

$$\text{Dann folgt } \int_\gamma \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} \overline{(r e^{i\varphi} + z_0)} r i e^{i\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} (r e^{-i\varphi} + \bar{z}_0) i r e^{i\varphi} d\varphi$$

$$= i r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi + \bar{z}_0 \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} d\varphi$$

$$= 2\pi i r^2 - \frac{\bar{z}_0 i}{r} \int_0^{2\pi} i r e^{i\varphi} d\varphi$$

$$= 2\pi i r^2 - \frac{\bar{z}_0 i}{r} \int_\gamma 1 dz$$

$$= 0$$

da 1 holomorph und $B_\varepsilon(z_0)$ Stammgebiet also nach Cauchy = 0

$$= 2\pi i r^2 \neq 0$$

Da γ geschlossen, hat $\bar{\cdot}$ keine Stamm-fkt auf $B_\varepsilon(z_0)$. □