Aufgabe	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1. (a) $K(\alpha)$ ist Zwischenkörper von L/K, also ex. nach dem Hauptsatz ein $H \subseteq G$ Untergruppe mit $H = \mathrm{Gal}(L/K(\alpha))$ und $K(\alpha) = L^H$. Sei $g \in H$. Dann ist $g(\alpha) = \alpha$, da $\alpha \in L^H$, also $g \in G_\alpha$. Sei nun $g \in G_\alpha$. Dann ist $g(\alpha) = g$ und $\alpha \in L^{\langle g \rangle}$. Also folgt $L^H = K(\alpha) \subseteq L^{\langle g \rangle}$ und damit $\langle g \rangle \subseteq H$, also $g \in H$.

(b) Für $\sigma \in G$ und $\alpha' \in A$ ist $\sigma(\alpha') \in A$, denn es ex. ein $\tau \in G$, s.d. $\alpha' = \tau(\alpha)$, also

$$\sigma(\alpha') = \sigma(\tau(\alpha)) = (\sigma \circ \tau)(\alpha).$$

Da σ Automorphismus, insbesondere injektiv und $\sigma(A) \subseteq A$, folgt $\sigma(A) = A$. Also permutiert σ die Nullstellen von f. Es folgt

$$f^\sigma = \prod_{\alpha' \in A} (X - \sigma(\alpha')) = \prod_{\alpha' \in A} (X - \alpha') = f.$$

Da σ beliebig, liegen die Koeffizienten von f in K, also $f \in K[X]$. Nach Konstruktion sind die Nullstellen von f genau A, also paarweise verschieden, also f separabel.

(c) Es ist $\alpha \in A$, also $f(\alpha) = 0$ und $f \in K[X]$. Es ist außerdem

$$\deg(f) = \#A = \#G\alpha = (G : G_\alpha).$$

Sei $n := [K(\alpha) : K]$. Dann folgt

$$\#G = [L : K] = [L : K(\alpha)]n = \#\mathrm{Gal}(L/K(\alpha))n \overset{\text{(a)}}{=} \#G_\alpha n.$$

Lagrange liefert $n = (G : G_\alpha)$, also $n = \deg(f)$ und damit f Minimalpolynom von α.

Aufgabe 2. (a) Es ist

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z},$$

da $\varphi(5) = 4$. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ hat genau $\varphi(4) = 2$ Erzeuger, also ex. neben 0 genau ein Element $a \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ mit $1 < \mathrm{ord}(a) < 4$. Also existiert genau eine echte Untergruppe von $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, also ex. nach Hauptsatz genau ein echter Zwischenkörper von $\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q}$.

Es gilt $\zeta_5 \neq 1$, also betrachte

$$0 = \frac{\zeta_5^5 - 1}{\zeta_5 - 1} = \zeta_5^4 + \zeta_5^3 + \zeta_5^2 + \zeta_5 + 1 = \zeta_5^2 + 2\zeta_5\zeta_5^{-1} + \zeta_5^{-2} + \zeta_5 + \zeta_5^{-1} - 1 = \alpha^2 + \alpha - 1.$$

Damit ist

$$\alpha \in \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Da $\mathrm{Re}(\zeta_5) > 0$ und $\zeta_5^{-1} = \overline{\zeta_5}$, folgt $\mathrm{Re}(\alpha) = \mathrm{Re}(\zeta_5 + \zeta_5^{-1}) = 2\mathrm{Re}(\zeta_5) > 0$. Also folgt $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Also ist $\alpha \notin \mathbb{Q}$ und da $\zeta_5 \notin \mathbb{R}$, folgt $\zeta_5 \notin \mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{R}$. Also ist $\mathbb{Q}(\alpha)$ der eine echte Zwischenkörper.

(b) Es ist $\mathrm{Re}(\alpha) = 2\mathrm{Re}(\zeta_5)$, also $\mathrm{Re}(\zeta_5) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Dann ex. ein $a \in \mathbb{R}$, s.d.

$$\zeta_5 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} + ai.$$

Da $|\zeta_5| = 1$, folgt

$$a^2 + \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{4^2} = 1 \implies a = \pm\sqrt{1 - \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{4^2}}.$$

Die Punkte ζ_5^n bilden nach Definition der Einheitswurzeln ein regelmäßiges Fünfeck der Seitenlänge $|\zeta_5 - \zeta_5^5| = |\zeta_5 - 1|$. Es gilt

$$|\zeta_5 - 1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4} - 1\right)^2 + 1 - \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{4^2}} = \sqrt{2 + \frac{-\sqrt{5} + 1}{2}} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}.$$

Aufgabe 3. (a) OBdA sei $\tau = (12)$. Da σ 5-Zykel, ex. ein $k \in \{1, \dots, 4\}$, s.d. $\sigma^k(1) = 2$. Setze nun $\sigma := \sigma^k$ und durch Umbenennung sei oE $\sigma = (12345)$. Mit Blatt 11 4a folgt nun

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2)) = (23)$$

Analog folgt

$$\sigma^2\tau\sigma^{-2} = (34)$$
$$\sigma^3\tau\sigma^{-3} = (45).$$

Also $(12), (23), (34), (45) \in H$. Seien nun $a, b \in \{1, \dots, 5\}$ mit $a \neq b$. OE sei $a < b$. Dann setze

$$\rho = (b \quad b-1) \cdots (a+2 \quad a+1) \in H.$$

Dann ist $\rho(a+1) = b$ und $\rho(a) = a$. Damit folgt

$$H \ni \rho(a \quad a+1)\rho^{-1} = (\rho(a), \rho(a+1)) = (ab).$$

Also jede Transposition in H und da jede Permutation als Produkt von Tranpositionen dargestellt werden kann, folgt $H = \mathfrak{S}_5$.

(b) Da $f \in \mathbb{Q}$ irreduzibel und $\mathbb{Q}$ vollkommen, folgt f separabel. Sei also L der ZK von f über $\mathbb{Q}$. Dann ist $L/\mathbb{Q}$ galoissch. Setze $G := \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \subseteq \mathfrak{S}_5$. Dann betrachte den $\mathbb{Q}$-Autom.

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} \colon L &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \overline{z}. \end{aligned}$$

Da $\mathbb{C}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q} \subseteq L$ und $L/\mathbb{Q}$ normal, beschränkt sich $\tilde{\pi}$ zu einem $\mathbb{Q}$-Automorphismus $\pi \colon L \to L$. Es ist also $\pi \in G$ und da f genau zwei nicht-reelle Nullstellen hat, G transitiv auf den Nullstellen operiert und $\pi|_{\mathbb{R}} = \mathrm{id}$, lässt π die 3 reellen Nullstellen fest und vertauscht die komplexen Nullstellen. π ist also eine Transposition.

Sei weiter $\alpha \in L$ mit $f(\alpha) = 0$. Dann ist f Mipo von α über $\mathbb{Q}$, also $[K(\alpha) : \mathbb{Q}] = 5$, damit folgt mit Gradsatz, dass $5 \mid [L : \mathbb{Q}]$, also ex. nach Sylowsätzen ein $\sigma \in G$ mit $\mathrm{ord}(\sigma) = 5$. Also ist σ ein 5-Zykel in $\mathfrak{S}_5$ und damit nach (a) $G = \mathfrak{S}_5$.

(c) Es ist $f = 2X^5 - 10x + 5$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$, da f primitiv und damit irreduzibel nach Eisenstein mit $p = 5$.

Es ist f als Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar mit $f' = 10x^4 - 10$. f' hat genau 2 reelle Nullstellen bei ± 1. Nach Satz von Rolle, hat damit f maximal 3 reelle Nullstellen. Es gilt weiter

$$f(-2) < 0 \quad f(0) > 0 \quad f(1) < 0 \quad f(2) > 0.$$

Also ex. nach Zwischenwertsatz mindestens 3 reelle Nullstellen jeweils eine zwischen $f(-2)$ und $f(0)$, $f(0)$ und $f(1)$ und $f(1)$ und $f(2)$. Also hat f genau 3 reelle Nullstellen.

Nach (b) ist also die Galoisgruppe der Gleichung $f(X) = 0$ die ganze $\mathfrak{S}_5$, insbesondere ist $f(X) = 0$ nicht durch Radikale auflösbar, da $\mathfrak{S}_5$ nicht auflösbar ist.

Aufgabe 4. Sei G eine endliche Gruppe und bezeichne s_p die Anzahl der p-Sylowgruppen von G.

(a) Zunächst sei $\#G = 6 = 2 \cdot 3$. Dann ist $s_3 \in \{1, 2, 3, 6\}$, aber $2, 3, 6 \not\equiv 1 \mod 3$, also $s_3 = 1$. Sei $H \subseteq G$ die einzige 3-Sylowgruppe von G. Damit folgt $H \triangleleft G$. und $\#H = 3$, also H 3-Gruppe, insb. auflösbar. Außerdem $\#G/H = 6/3 = 2$, also G/H $2-$Gruppe, insb. auflösbar. Insgesamt folgt also nach 5.48 G auflösbar.

Sei nun $\#G = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Dann ist $s_7 = 1$ nach Sylowsätzen. Sei $H \subseteq G$ die einzige 7-Sylow. von G. Dann ist $H \triangleleft G$ und $\#H = 7$, also H 7-Gruppe, insb. auflösbar. Außerdem ist $\#G/H = 42/7 = 6$, also G/H nach Vorüberlegung auflösbar. Insgesamt folgt mit 5.48 G auflösbar.

(b) Sei zunächst $\#G = 10 = 2 \cdot 5$. Dann ist wieder analog $s_2 = 1$ und da $10/2 = 5$ und 5 prim, folgt analog zu (a), dass G auflösbar.

Sei nun $\#G = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Dann ist $s_5 \in \{1, 6\}$ und $s_3 \in \{1, 10\}$. Falls $s_5 = 1$ und $30/5 = 6$ folgt analog zu (a), dass G auflösbar. Sei also nun $s_5 = 6$. Seien $H_1, H_2 \subseteq G$, $H_1 \neq H_2$ mit

$\# H_1 = H_2 = 5$. Da 5 Primzahl, haben H_1 und H_2 keine echten Untergruppen. Also folgt $H_1 \cap H_2 = \{1\}$. Da $s_5 = 6$ ex. also mindestens $6 \cdot (5-1) = 24$ Elemente der Ordnung 5 in G. Es kann maximal 6 Elemente der Ordnung 3 geben. Da 3 prim, also die 3-Sylows gerade die von diesen Elementen erzeugten Untergruppen sind, folgt $s_3 < 10 \implies s_3 = 1$. Argumentiere nun wieder analog zu (a), da $30/3 = 10$ und Gruppen der Ordnung 10 nach Vorüberlegung auflösbar.

(c) Seien G, H auflösbar und

$$1 = G_n \subset G_{n-1} \subset \ldots \subset G_0 = G$$
$$1 = H_m \subset H_{m-1} \subset \ldots \subset H_0 = H$$

Normalreihen mit abelschen Faktoren. Sei o.E. $n \geq m$. Dann setze $U_i \coloneqq G_i \times H_i$ mit $H_{m+1} = \ldots = H_n = 1$. Es gilt trivialerweise $H_{m+k} \triangleleft H_{m+k-1}$, also $(H_i)_{i=0}^n$ immer noch Normalreihe mit abelschen Faktoren von H.

Sei nun $a \in U_{i-1}$ mit $a = (g, h)$ und $g \in G_{i-1}, h \in H_{i-1}$. Dann ist, da $G_i \triangleleft G$ und $H_i \triangleleft H$:

$$aU_ia^{-1} = a(G_i \times H_i)a^{-1} = (gG_ig^{-1}) \times (hH_ih^{-1}) = G_i \times H_i = U_i.$$

Außerdem sei $\varphi\colon G_{i-1} \times H_{i-1} \to G_{i-1}/G_i \times H_{i-1}/H_i$, $(g, h) \mapsto (\overline{g}, \overline{h})$. Dann ist φ Grp.hom. und $\ker \varphi = G_i \times H_i$. Also folgt mit Hom.satz:

$$(G_{i-1} \times H_{i-1})/(G_i \times H_i) \stackrel{\sim}{=} G_{i-1}/G_i \times H_{i-1}/H_i.$$

Also ist

$$1 = U_n \subset U_{n-1} \subset \ldots \subset U_0 = G \times H$$

eine Normalreihe mit abelschen Faktoren.