0.1 Mittelwertsatz und Satz von Rolle

Definition 0.1 (globales / lokales Extremum)**.** Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in D$ ein globales Extremum (Maximum oder Minimum), falls gilt $f(x_0) \geq f(x)$ bzw. $f(x_0 \leq f(x)\ \forall x \in D$.

Die Funktion f hat in $x_0 \in D$ ein lokales Extremum (Maximum oder Minimum), falls $\exists \delta > 0$, s.d. $f(x_0) \geq f(x)$ bzw. $f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in B_\delta(x_0) \cap D =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

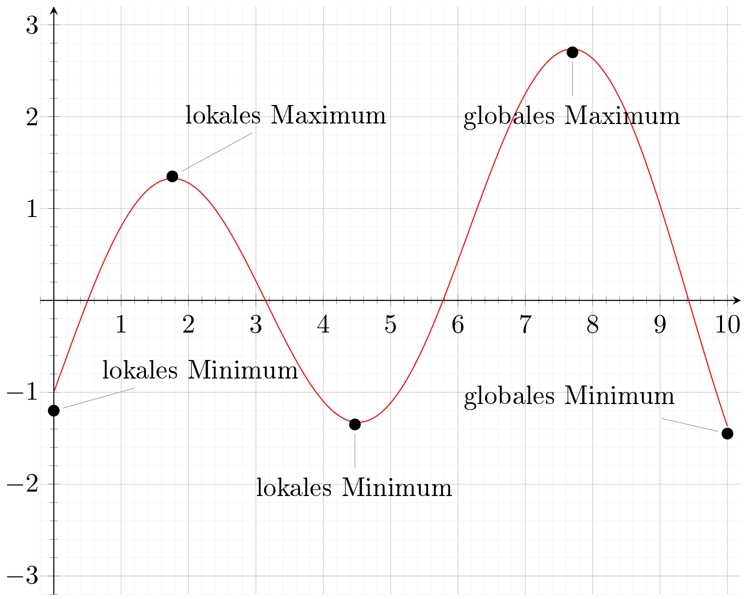

Abbildung 1: Beispiel für Extrema

Satz 0.2. Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $a < x_0 < b$. Ist f in x_0 differenzierbar, und ist x_0 ein lokales Extremum, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis. Sei x_0 ein lokales Maximum, dann $\exists \delta > 0$, s.d. $f(x) - f(x_0) \leq 0\ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap (a,b)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \underbrace{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)}_{\leq 0} = \lim_{x \nearrow x_0} \underbrace{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)}_{\geq 0}.$$

$\implies f'(x_0) = 0$. Analog für Minimum □

Bemerkung 0.3.
1. $a < x_0 < b$ ist wichtig! z.B.: $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ $f(x) := x$. Maximum bei $x = 1$, Minimum bei $x = 0$ mit Ableitung $f'(x) = 1 \neq 0$.
2. $f'(x_0)$ nur eine notwendige Bedingung für ein lokales Extremum, z.B.: $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2 \implies f'(0) = 0$, aber $x = 0$ ist kein lokales Extremum.

Satz 0.4 (Satz von Rolle)**.** Es sei $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(b)$, f auf (a,b) differenzierbar.

Dann ex. ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis. Ist $f(x) = f(a)\ \forall x \in [a,b] \implies$ Behauptung $\forall \xi \in]a,b[$.

Nun f nicht konstant. $[a,b]$ ist kompakt und f ist stetig, d.h. f nimmt Minimum und Maximum an.
$\implies \exists x_{\min}, x_{\max} \in [a,b]$ mit $f(x_{\min}) = \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ und $f(x_{\max}) = \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$.
Da f nicht konstant $\implies f(x_{\min}) < f(a) = f(b)$ oder $f(x_{\max}) > f(a) = f(b)$.
$\implies x_{\min} \in (a,b)$ oder $x_{\max} \in (a,b)$
$\overset{\text{Satz 0.2}}{\implies} f'(x_{\min}) = 0$ oder $f'(x_{\max}) = 0$
$\implies$ Behauptung gilt mit $\xi = x_{\min}$ oder $\xi = x_{\max}$. □

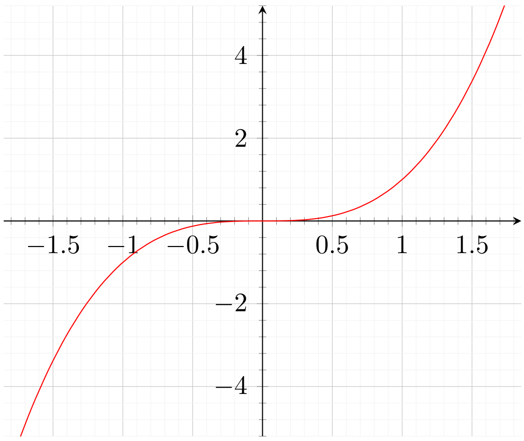

Abbildung 2: x^3 hat bei $x = 0$ kein lokales Extremum

Satz 0.5 (Mittelwertsatz)**.** Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf $]a,b[$. Dann ex. ein $\xi \in]a,b[$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Beweis. Hilfsfunktion $g(x) := f(x) - f(a) - m(x-a)$ mit $m := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Damit folgt $g(a) = g(b) = 0 \overset{\text{Satz 0.4}}{\Longrightarrow} \exists \xi \in]a,b[$ mit $g'(\xi) = 0 \implies f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. □

Satz 0.6 (Monotoniekriterium)**.** Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf $D \subset \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt

(i) f monoton wachsend $\iff f'(x) \geq 0\ \forall x \in D$

(ii) f streng monoton wachsend $\iff f'(x) > 0\ \forall x \in D$

Für fallende Funktionen ersetze f durch $-f$.

Beweis. Es gilt $\forall a < b \in D$ nach Satz 0.5

$$f(b) - f(a) = \underbrace{(b-a)}_{>0} f'(x) \qquad (*).$$

für ein $x \in]a,b[$. Daraus folgt direkt (ii) und (i, „ $\Longleftarrow$ ")

Für (i, „ $\Longrightarrow$ "): Betrachte in $(*)$:

$$\lim_{b \to a} \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\geq 0} = f'(a) \geq 0.$$

□

Satz 0.7. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt f ist konstant auf $D \iff f' \equiv 0$ auf D

Beweis. „ $\Longrightarrow$ " klar.

„ $\Longleftarrow$ ": Für $a < b \in D$ gilt $f(b) - f(a) = (b-a)\underbrace{f'(x)}_{=0}$, $x \in]a,b[\Longrightarrow f(b) = f(a)$. □

0.2 Höhere Ableitungen und Satz von Taylor

Definition 0.8. Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann sagt man: f ist zweimal differenzierbar und $f''\colon D \to \mathbb{R}$ heißt die zweite Ableitung von f.

Analog wird die n-te Ableitung $f^{(n)}$ von f definiert mit $f^{(0)} := f$, die „nullte" Ableitung. Schreibe

$$\frac{d^n f}{dx^n} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{d}{dx}\right)^n f \quad \text{oder} \quad \frac{d^n}{dx^n} f.$$

Definition 0.9 ($C^n(D, \mathbb{R})$)**.** Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar auf D, falls f auf D differenzierbar und $f'\colon D \to \mathbb{R}$ stetig ist. Schreibe $f \in C^1(D, \mathbb{R})$.

f heißt n-mal stetig differenzierbar auf D ($f \in C^n(D, \mathbb{R})$), falls f n-mal differenzierbar und $f^{(n)}\colon D \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Bemerkung 0.10.

1. Ist f beliebig oft differenzierbar, dann gilt $f \in C^\infty(D, \mathbb{R})$ bzw. f ist glatt auf D.
2. f stetig auf D, dann gilt $f \in C^0(D, \mathbb{R})$.
3. $f \in C^n(D, \mathbb{R}) \implies f^{(k)}$ stetig auf D $\forall 0 \leq k \leq n$.