Aufgabe	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1. (a) Beh.: $T(t) = (T_0 - T_a)e^{kt} + T_a$ löst das gegebene AWP.

Beweis. Löse zunächst homogene DGL durch Trennung der Variablen:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = kT \implies \frac{\mathrm{d}T}{T} = k\,\mathrm{d}t \implies T_h = Ae^{kt}.$$

Mit der partikulär Lösung $T_i = T_a$ ($T_a' = 0 = kT_a - kT_a$), folgt: $T(t) = Ae^{kt} + T_a$. Mit $T(0) = T_0$ folgt $A = T_0 - T_a$, also insgesamt

$$T(t) = (T_0 - T_a)e^{kt} + T_a.$$

□

(b) Beh.: Es dauert 60 Zeiteinheiten.

Beweis. Mit $k := -\frac{\ln 2}{20}$ folgt

$$T(20) = (T_0 - T_a)\exp\left(-\frac{\ln 2}{20}\cdot 20\right) + T_a = \frac{1}{2}(T_0 - T_a) + T_a = \frac{1}{2}(T_0 + T_a).$$

Mit $T_0 = 100$ und $T_a = 20$ folgt $T(20) = 60$. Damit folgt nun direkt

$$\begin{aligned} T(60) &= (T_0 - T_a)\exp\left(-\frac{\ln 2}{20}\cdot 60\right) + T_a \\ &= (T_0 - T_a)\exp\left(-\ln\left(2^3\right)\right) + T_a \\ &= (T_0 - T_a)\frac{1}{8} + T_a \\ &= \frac{1}{8}T_0 + \frac{7}{8}T_a. \end{aligned}$$

Mit $T_0 = 100$ und $T_a = 20$ folgt $T(60) = 30$. □

(c) Beh.: $\lim_{t\to\infty} T(t) = 20$.

Beweis. Es gilt da $k < 0$:

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = \lim_{t\to\infty}((T_0 - T_a)\underbrace{e^{kt}}_{\xrightarrow{t\to\infty} 0} + T_a) = T_a.$$

Mit $T_a = 20$ aus (b) folgt die Behauptung. □

Aufgabe 2. Beh.: Falls $y_0 = -1$ ist $y(t) = -1$ Lösung der AWA.

Beweis. Es gilt $y(t_0) = -1 = y_0$ und $y'(t) = 0 = -2t(1-1)^2 = -2t(1 + y(t))^2$, $\forall t \in \mathbb{R}$. □

Beh.: Falls $y_0 \neq -1$ ist $y(t) = -\frac{1}{t_0^2 - t^2 - \frac{1}{1+y_0}} - 1$ Lösung der AWA.

Beweis. Falls $y \neq -1$: Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -2t(1+y)^2 \\ \implies \frac{\mathrm{d}y}{(1+y)^2} &= -2t\,\mathrm{d}t \\ \implies \int_c^y \frac{\mathrm{d}y}{(1+y)^2}\,\mathrm{d}y &= \int_{t_0}^t -2t\,\mathrm{d}t \\ \implies -\frac{1}{1+y} - \frac{1}{1+c} &= -t^2 + t_0^2 \end{aligned}$$

Damit folgt

$$y(t) = -\frac{1}{t_0^2 - t^2 + \frac{1}{1+c}} - 1$$

Durch Einsetzen der Anfangsbedingung folgt

$$y(t_0) = -1 - c - 1 = y_0 \implies c = -2 - y_0$$

Insgesamt folgt also

$$y(t) = -\frac{1}{t_0^2 - t^2 - \frac{1}{1+y_0}} - 1.$$

Dies ist wohldefiniert da $y_0 \neq -1$. Da $1 \neq 0$ folgt $y(t) \neq -1$ $\forall t \in \mathbb{R}$, d.h. keine weitere Fallunterscheidung notwendig und $y(t)$ Lösung der AWA. □

Aufgabe 3. (a) Beh.: Das gegebene AWP hat eine Lösung $y\colon [0, b] \to \mathbb{R}$.

Beweis. Es ist $f(t, y) = \frac{1}{1+|y|}$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stetig. Bestimme

$$M = \max_{(t,y)\in D} |f(t, y)| > 0.$$

Wähle $\alpha := b > 0$ und $\beta := 2\alpha M$. Dann ist f insbesondere auf

$$D = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |t| \leq \alpha, |y - y_0| \leq \beta\}$$

stetig. Dann ex. nach dem Satz von Peano auf dem Intervall $[t_0 - T, t_0 + T]$ eine Lösung der AWA mit

$$T = \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{M}\right\} = \min\{\alpha, 2\alpha\} = \alpha = b.$$

Mit $t_0 = 0$ existiert also inbesondere eine Lösung $y(t)$ auf $[0 + b] \subseteq [-T, T]$. □

(b) Beh.: Diese Lösung y ist für festes $y_0 \in \mathbb{R}$ eindeutig.

Beweis. Nach VL g.z.z., dass $f(t, y)$ Lipschitz-stetig bezüglich y ist. Seien dazu $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
|f(t, x) - f(t, y)| &= \left|\frac{1}{1+|x|} - \frac{1}{1+|y|}\right| \\
&= \left|\frac{|y| - |x|}{(1+|x|)(1+|y|)}\right| \\
&\leq \frac{|x-y|}{1 + |x| + |y| + |xy|} \\
&\leq 1 \cdot |x - y|.
\end{aligned}$$

Mit $L := 1$ folgt die Behauptung. □

(c) Sei nun zusätzlich $v\colon [0, b] \to \mathbb{R}$ Lösung der AWA mit $v(0) = v_0$.
Beh.:

$$|y(t) - v(t)| \leq e^t |y_0 - v_0| \quad \forall t \in [0, b].$$

Beweis. Definiere

$$w(t) := |y(t) - v(t)|.$$

Da y und v die AWA lösen, erfüllen sie die Integralgleichung. Damit folgt

$$\begin{aligned}
w(t) &= \left|y_0 - v_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))\,\mathrm{d}s - \int_{t_0}^t f(s, v(s))\,\mathrm{d}s\right| \\
&\leq |y_0 - v_0| + \int_{t_0}^t |f(s, y(s)) - f(s, v(s))|\,\mathrm{d}s \\
&\overset{\text{(b)}}{\leq} |y_0 - v_0| + \int_{t_0}^t |y(s) - v(s)|\,\mathrm{d}s \\
&= |y_0 - v_0| + \int_{t_0}^t w(s)\,\mathrm{d}s \\
&\overset{\text{Lemma v. Gronwall}}{\leq} e^{t-t_0}|y_0 - v_0|.
\end{aligned}$$

Mit $t_0 = 0$ folgt die Behauptung. □

Aufgabe 4.

$$\begin{aligned} y'(t) &= 3(y(t))^{\frac{2}{3}}, t \in I \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

(a) Beh.: Es ex. unendlich viele Lösungen für diese AWA.

Beweis. Die Funktion $y(t) = (t - t_0)^3$ löst die AWA mit $y(t_0) = 0$. Denn

$$y'(t) = 3(t-t_0)^2 = 3(t-t_0)^{2\cdot 3\cdot \frac{1}{3}} = 3\left((t-t_0)^3\right)^{\frac{2}{3}} = 3(y(t))^{\frac{2}{3}} \quad (*).$$

Da $I \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossenes Intervall mit $0 \in I$, ex. $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < 0$, $b > 0$, s.d. $I = [a, b]$. Definiere nun

$$y_d(t) := \begin{cases} 0 & a \le t \le d \\ (t-d)^3 & \text{sonst} \end{cases}.$$

g.z.z.: $\forall d \in R$ mit $0 \le d \le b$ ist $y_d(t)$ eine Lösung der AWA.

Es gilt $y_d(t_0) = y_d(0) = 0$. Weiter ist mit für $t \neq d$:

$$y_d'(t) = \begin{cases} 0 = 3(y(t))^{\frac{2}{3}} & a \le t < d \\ 3(y(t))^{\frac{2}{3}} & \text{sonst} \end{cases}.$$

Für $t = d$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{h \searrow 0} \frac{y_d(d+h) - y_d(d)}{h} &= \lim_{h \searrow 0} \frac{(d+h-d)^3 - (d-d)^3}{h} \\ &= \lim_{h \searrow 0} \frac{h^3}{h} \\ &= \lim_{h \searrow 0} h^2 \\ &= 0 \\ &= \lim_{h \nearrow 0} \frac{y_d(d+h) - y_d(d)}{h}. \end{aligned}$$

Also gilt für $t \in I$: $y_d'(t) = 3(y_d(t))^{\frac{2}{3}}$. Damit löst $y_d(t)$ die AWA. $\square$

(b) Beh.: $f(t, y) := 3y^{\frac{2}{3}}$ ist nicht Lipschitz-stetig.

Beweis. Sei $L > 0$ beliebig. Dann wähle $x = 0$ und $y < \left(\frac{3}{L}\right)^3$. Dann folgt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left|3y^{\frac{2}{3}}\right| \\ &= \left|3y^{-\frac{1}{3}}\right| |y| \\ &> \left|3\frac{L}{3}\right| |y| \\ &= L|y|. \end{aligned}$$

$\square$

Die Lipschitz-stetigkeit von f bezüglich y ist Voraussetzung für den Eindeutigkeitssatz aus der VL.

(c) siehe (a).