Begriffe

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

hat Komponentenfkt: $f_i: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^1$

part. Ableitungen: $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in \mathbb{R}$ Richtungsabl. $D_v f_i(x) \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n$

Jacobi-Matrix
$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Differential:
$$\begin{aligned} Df(x): \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ v &\longmapsto J_f(x) \cdot v \end{aligned}$$

VL Woche 5. und 7.5.21

- Differentiation und Integration im $\mathbb{R}^n$

$I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $h \in C^0(I \times [a,b])$. Dann ist

$$F(x) := \int_a^b f(x,t)\,dt : I \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{stetig.}$$

Existieren zusätzlich $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ stetig $\forall (x,t) \in I \times [a,b]$, dann:

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

kurz:
$$\frac{\partial}{\partial x} \int_a^b f(x,t)\,dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

- Einfacher Fubini (gilt in <u>SEHR</u> viel größerer Allgemeinheit)

$f \in C^0([a,b] \times [c,d])$. Dann gilt

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

- Integration vektor(/matrix-)wertiger Fkt: $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ stetig, also $f_{ij} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig $\forall\, i,j$.

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt := \left(\int_{t_0}^{t_1} f_{ij}(t)\,dt \right)_{ij} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

also: Vektoren / Matrizen werden <u>komponentenw.</u> integriert!

- Intervalle im $\mathbb{R}^n$: $x, y \in \mathbb{R}^n$, $[x,y] := \{ x + t(y-x) \mid t \in [0,1] \}$

- $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}^m$ stetig diff'bar. $x \in D$, $h \in \mathbb{R}^n$, $[x, x+h] \subseteq D$. Dann gilt:

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 Df(x+th)[h]\,dt$$

$$= \int_0^1 J_f(x+th) \cdot h\,dt$$

$$= \int_0^1 J_f(x+th)\,dt \cdot h$$

"verallg. Hauptsatz" oder auch "Mittelwertsatz im $\mathbb{R}^n$"

- $v: [a,b] \to \mathbb{R}^m$ stetig. Dann gilt:

$$\left| \int_a^b v(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |v(t)|\,dt$$

- Operatornorm: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$: $\|A\|_{op} := \sup\{ \underbrace{\|Av\|}_{\in \mathbb{R}^m} : \|v\| = 1,\ v \in \mathbb{R}^n \}$

- $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \to \mathbb{R}^m$ stetig diff'bar. Für $x \in D$, $h \in \mathbb{R}^n$ und $[x, x+h] \in D$ gilt:

$$|f(x+h) - f(x)| \leq M\,|h|$$

mit $M := \max\{ \|J_f(x+th)\|_{op} \mid t \in [0,1] \} < \infty$

$\to$ Für $\overline{B} \subseteq D$ abgeschl. Ball ist

$$f|_{\overline{B}} : \overline{B} \to \mathbb{R}^m \quad \text{Lipschitz-stetig.}$$

Taylor im $\mathbb{R}^n$

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

- Multiindizes: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

$$\alpha! := \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$$

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdot \dots \cdot \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} f$$

- $f \in C^{k+1}(D, \mathbb{R})$, $x_0, x \in D$ mit $[x_0, x] \subseteq D$.

Dann ex. ein $v \in [x_0, x]$ mit

$$f(x) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \leq k}} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0) \cdot (x - x_0)^\alpha + \underbrace{\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^k \\ |\alpha| = k+1}} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(v)(x - x_0)^\alpha}_{\text{Restglied}}$$

Zugänglichere Darstellung:

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} (x - x_0)^t H_f(x_0)(x - x_0) + \dots$$

Lokale Extrema

- $f: D \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in D$ lokal. Maximum $\overset{\text{df}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\, U \subseteq D$ offen mit $x_0 \in U$ und $\forall x \in U$: $f(x) \leq f(x_0)$.

Notwendige Bedingung: $f: D \to \mathbb{R}$ partiell d'bar und f in $x_0 \in D$ lokal. Extremum

Dann gilt $\nabla f(x_0) = 0$

Hinreichende Bedingung: $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, $x_0 \in D$, $\nabla f(x_0) = 0$. Dann gilt

→ $H_f(x_0)$ positiv (negativ) definit, so besitzt f in x_0 ein lok. Minimum (Maximum)

→ $H_f(x_0)$ indefinit: f in x_0 kein lok. Extremum.

Recap: Definitheit von Matrizen: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetr.

A pos. definit $\overset{df}{\Longleftrightarrow}$ $x^t A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $\Longleftrightarrow$ Alle EW > 0

neg. definit $\overset{df}{\Longleftrightarrow}$ $x^t A x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $\Longleftrightarrow$ Alle EW < 0

indefinit $\Longleftrightarrow$ $\exists x, x' \in \mathbb{R}^n$ mit $x^t A x > 0$ und $x'^t A x' < 0$

$\Longleftrightarrow$ $\exists$ EW $>$ und < 0

A1

a) $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 1 & 3y^2 \\ 2xy^2 - y & 2x^2y - x \end{pmatrix}$

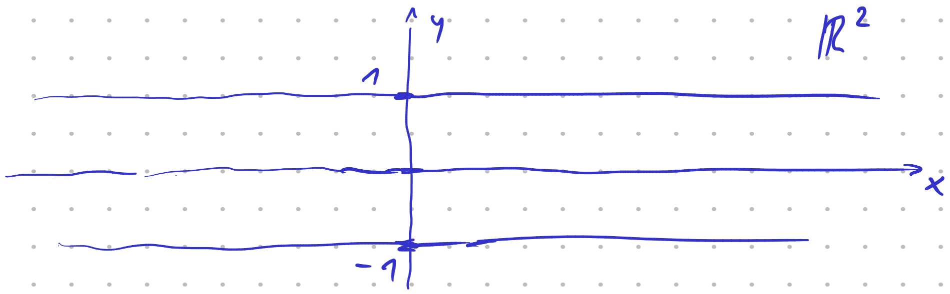
b) $J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{y^2} & 2xye^{y^2} & 0 \\ z\cos(x) & 0 & \sin(x) \end{pmatrix}$

c) $J_h(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1+y^2}{x^2+(1+y^2)^2} & -\frac{2xy}{x^2+(y^2+1)^2} \\ y & x \end{pmatrix}$

A2

a) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \end{pmatrix}$

$N_1 = \{f=1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \{\pm 1\}\}$



$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \; t \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \in N_1 \quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

dann ist $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0 \quad \forall t \in [0,1]$.

b) $\nabla f(x,y,z) \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

$N_1 = \{f=1\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2+z^2 = 1\}$ Mit Pythagoras ist das ein Zylinder mit Radius 1 entlang der x-Achse.

$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall t \in [0,1]$

$\Rightarrow \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$

c) $\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$ $\quad N_1 = \{f = 1\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 = 1\}$

also nach Blatt 1 eine Kugel mit Radius 1.

$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ \varphi \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \ \gamma'(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]$

$\Rightarrow \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 2\cos\varphi\,(-\sin\varphi) + 2\sin\varphi\cos\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi]$