

VL Woche 19. und 21.5.

Inverses Funktionentheorem (Wichtig) $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -Abb.

und im Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ sei $J_f(a)$ invertierbar (also $\det(J_f(a)) \neq 0$).

Dann ex. eine offene Umgebung $U \subseteq D$ von a mit

$$f|_U: U \rightarrow f(U) \text{ Diffeomorphismus.}$$

(auch "Umkehrsatz")

Wichtige Beispiele: krummlinige Koordinaten, z.B.

· Polarkoordinaten $f: \underbrace{(0, \infty) \times (-\pi, \pi)}_{=: U} \rightarrow f(U)$

$$(r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

ist Diffeomorph. Effiziente Art polarsymmetr. Probleme zu lösen!



· Zylinderkoord., Kugelkoord., ...

A1/ Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann betrachte die Differentialgleichung $f'(x) = a f(x)$ für ein $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

a) Zz: f_b löst die DGL für $b \in \mathbb{R}$.

$$f_b'(x) = a b e^{ax} = a \cdot (b e^{ax}) = a f_b(x)$$

□

b) Sei f bel. Lsg der DGL. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (f(x) \cdot e^{-ax}) &= f'(x) e^{-ax} - a f(x) e^{-ax} \\ &\stackrel{\text{DGL}}{=} a f(x) e^{-ax} - a f(x) e^{-ax} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also folgt $f(x) \cdot e^{-ax} = b$ für ein $b \in \mathbb{R}$. Damit: $f(x) = b e^{ax}$.

□

A2/ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) := \begin{pmatrix} (x^2 + y^2) \cos(x) \\ (x^2 + y^2) \sin(x) \end{pmatrix}$

a) Bew. Es ist $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Wir wollen den Umkehrsatz anwenden:

Berechne dazu für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \cos(x) - (x^2 + y^2) \sin(x) & 2y \cos(x) \\ 2x \sin(x) + (x^2 + y^2) \cos(x) & 2y \sin(x) \end{pmatrix}$

$$\det(J_f(x, y)) = -2y(x^2 + y^2).$$

Dann gilt für $y \neq 0$: $\det(J_f(x, y)) \neq 0 \stackrel{\text{Umkehrsatz}}{\Rightarrow} \exists$ offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{D}$ von (x, y) mit $f|_U: U \rightarrow f(U)$ Diffeom.

Insbes. ist $f(U)$ offen und $f|_U$ bijektiv.

b) Beh. Nein

Bew. Betrachte $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$ und $\varepsilon > 0$ bel. Zz: $f|_{B_\varepsilon(0,0)}$ nicht injektiv.

Es ist $f(x, \frac{\varepsilon}{2}) = f(x, -\frac{\varepsilon}{2})$ aber

$(x, \frac{\varepsilon}{2}), (x, -\frac{\varepsilon}{2}) \in B_\varepsilon(0,0)$ und $(x, \frac{\varepsilon}{2}) \neq (x, -\frac{\varepsilon}{2})$ da $\varepsilon > 0$.

□

c) $\eta_2 = J_{g \circ f}(\pi, \pi) \stackrel{\text{V Kettenregel}}{=} J_g(f(\pi, \pi)) \cdot J_f(\pi, \pi)$

$$\Rightarrow J_g(f(\pi, \pi)) = J_f(\pi, \pi)^{-1}$$

Bestimme also $J_f(\pi, \pi)$ durch einsehen:

$$J_f(\pi, \pi) = \begin{pmatrix} 2\pi \cos(\pi) - (\pi^2 + \pi^2) \sin(\pi) & 2\pi \cos(\pi) \\ (\pi^2 + \pi^2) \cos(\pi) + 2\pi \sin(\pi) & 2\pi \sin(\pi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2\pi & -2\pi \\ -2\pi^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann folgt $J_g(f(\pi, \pi)) = J_f(\pi, \pi)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2\pi^2} \\ -\frac{1}{2\pi} & \frac{1}{2\pi^2} \end{pmatrix}$