VL Woche 26. und 28.5.

<u>Implizite Funktionen</u>:

Wollen Gleichung $f(x,y)=0$ nach y auflösen.

<u>SIF</u>: $U\subseteq\mathbb{R}^n$, $V\subseteq\mathbb{R}^k$ offen und $f: U\times V \longrightarrow \mathbb{R}^k$

$(x,y)\longmapsto f(x,y)$

mit $f\in C^\ell(U\times V,\mathbb{R}^k)$ mit $\ell\geq 1$.

Es gelte im Punkt $(x_0,y_0)\in U\times V$:

i) $f(x_0,y_0)=0$

ii) $$J_f = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} & \frac{\partial f_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial y_k} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{=:\frac{\partial f}{\partial y}\left(=D_y f\right)}$$

$$\det\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$$

Dann ex. offene Mengen $U_0\subseteq U$, $V_0\subseteq V$ mit $(x_0,y_0)\in U_0\times V_0$ und $g\in C^\ell(U_0,V_0)$ mit

$$f(x,y)=0 \iff y=g(x) \qquad \forall (x,y)\in U_0\times V_0$$

(g ist also eindeutig)

(Unter)-Mannigfaltigkeiten: $N \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ heißt n-dim. Untermannigfaltigkeit der Klasse C^ℓ, falls:

$\forall p \in N$: $\exists$ Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ und $f \in C^\ell(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+k})$ mit

$N \cap U = \pi(\text{graph } f)$ wobei $\pi \in \mathrm{Sym}_n$ (Permutation der Variablen)

Wichtig

SIF liefert: $D \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ offen, $f: D \to \mathbb{R}^k$ C^ℓ-Funktion mit

$\text{rang } J_f(p) = k$ $\forall p \in f^{-1}(\{0\})$. Dann ist

$f^{-1}(\{0\}) \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dim. Mgfkt des $\mathbb{R}^{n+k}$

Standardbeispiel: $n=2$, $k=1$, $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$

Dann ist $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \longmapsto x^2+y^2+z^2-1$ stetig diff'bar

und $J_f(p) = (2x \;\; 2y \;\; 2z) \neq 0$ $\forall p \neq 0$ also
$\text{Rang}(J_f(p)) = 1 = k$.

$\Rightarrow$ S^2 2-dim Untermanigfkt des $\mathbb{R}^3$.

Extrema unter Nebenbedingungen: $D \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R})$, $g \in C^1(D, \mathbb{R}^k)$

Suchen Extrema von f unter Nebenbedingung $g=0$, heißt ein $p \in \{g=0\}$ sd.

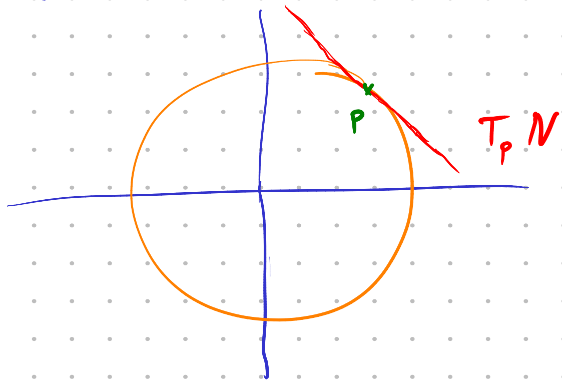
$\exists$ Umgebung $U \subseteq D$ von p mit $f(p) \geq f(x)$ $\forall x \in U \cap \{g=0\}$

Tangentialraum: $N \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ n-dim. Untermannigfaltigkeit. und $p \in N$.

Dann heißt $T_pN := \{ v \in \mathbb{R}^{n+k} \mid \exists \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow{C^1} N \text{ mit } \gamma(0) = p, \gamma'(0) = v \}$

Tangentialraum von N in p.

Bsp.: $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ (Kreis)



Handhabbarer: als Graph: $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $g : U \longrightarrow V$ mit $p = (x_0, g(x_0))$ s.d.

$$N \cap (U \times V) = \{ (x, g(x)) \in \mathbb{R}^{n+k} \mid x \in U \}$$

$$\Rightarrow T_pN = \{ (v, J_g(x_0) \cdot v) \in \mathbb{R}^{n+k} \mid v \in \mathbb{R}^n \}$$

als Nullstellenmenge: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $D \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ offen mit $p \in N \cap D = \{ x \in D \mid f(x) = 0 \}$ und rang $J_f(p) = k$.

$$\Rightarrow T_pN = \ker J_f(p)$$

Wichtig:

Anwendung: Lagrange Multiplikatoren: $D \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ und $g = (g_1, \dots, g_k) \in C^1(D, \mathbb{R}^k)$ und f habe Extremum unter Nebenbed. $g = 0$ in $p \in \{ f = 0 \}$ und $\nabla g_1(p), \dots, \nabla g_k(p)$ l.u.

$\Rightarrow$ Dann ex. $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit

$$\nabla f(p) = \lambda_1 \nabla g_1(p) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(p)$$

A1) $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) := x^2 + 3y + \sin(2xy)$

Zz: $\exists \varepsilon > 0$ und eind. Funktion $f: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ mit $F(x, f(x)) = 0$.

Idee: Benutze SIF

- $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar
- $F(0,0) = 0$
- $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = \left(3 - 2x\cos(2xy)\right)\Big|_{(x,y)=(0,0)} = 3 \neq 0$

$\overset{\text{SIF}}{\Rightarrow}$ Es ex. offene Mengen $U_0 \subseteq \mathbb{R}$, $V_0 \subseteq \mathbb{R}$ mit $(0,0) \in U_0 \times V_0$ und C^1-Abb.
$f: U_0 \to V_0$ mit $F(x,y) = 0 \iff y = f(x)$ $\forall (x,y) \in U_0 \times V_0$.

Da $U_0 \subseteq \mathbb{R}$ offen und $0 \in U_0$ ex. ein $\varepsilon > 0$ sd. $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U_0$.
$\Rightarrow f: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ mit $F(x, f(x)) = 0$ $\forall x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Zz. $f'(0) = 0$ und $f''(0) = -\frac{2}{3}$.

NR: $F(x,y) := x^2 + 3y + \sin(2xy)$ $\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 2\cos(2xy) - 2xy\sin(2xy)$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2y\sin(2xy)$ $\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2 - 4y^2 \sin(2xy)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 3 + 2x\cos(2xy)$ $\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -4x^2 \sin(2xy)$

Wir haben $F(x, f(x)) = 0$ also $DF(x, f(x)) = 0$ $\forall x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Betrachte $x \longmapsto (x, f(x)) \overset{F}{\longmapsto} F(x, f(x))$

Also mit Kettenregel:

$$\left(\frac{d}{dx}F(x,f(x)) =\right) DF(x, f(x)) = DF(x,y)\Big|_{(x,f(x))} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\, f'(x)$$

Kurz: $0 = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} f'$

$\det\left(\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_0\right) \neq 0$

$\Rightarrow \quad 0 = \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_0 + \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_0 f'(0) \quad \Rightarrow \quad f'(0) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_0\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_0$

$= -\frac{1}{3} \cdot \left[2x + 2y\cos(2xy)\right]\Big|_0$

$= 0$

Nun zweite Ableitung: $0 = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} f'$

$0 = \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} f'\right]$

Kettenregel genauer in (*)

$= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} f' + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} f'\right) f' + \frac{\partial F}{\partial y} f''$

$\overset{\text{Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} f' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} f'^2 + \frac{\partial F}{\partial y} f''$

$\Rightarrow \quad f''(0) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} f' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} f'^2\right)\Big|_0$

$= -\frac{1}{3}\left(2 + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 0\right) = -\frac{2}{3}$

(*) Kettenregel auf $x \mapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) f'(x)$

A2| $f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 25z^2$, NB: $\tilde{g}(x,y,z) = 100$ und $\tilde{g}(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

Idee: Lagrange Multiplikatoren

- Setze $g(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 - 100$. Dann ist $\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$ (l.u.)

- $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

Sei p ein lok. Extremum unter NB $g(p) = 0$. Dann gilt

$$\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$$

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \\ 50z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \\ 50z \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \text{ und } x^2 + y^2 + z^2 \stackrel{!}{=} 100$$

Löse GLS:

$$2x = \lambda 2x \Rightarrow x(1-\lambda) = 0$$
$$8y = \lambda 2y \Rightarrow y(4-\lambda) = 0$$
$$50z = \lambda 2z \Rightarrow z(50-\lambda) = 0$$

① $x \neq 0 \Rightarrow \lambda = 1$ und $y = z = 0 \Rightarrow x^2 = 100$ $\quad p_{1/2} = (\pm 10, 0, 0)$

② $y \neq 0 \Rightarrow \lambda = 4$ und $x = z = 0 \Rightarrow y^2 = 100$ $\quad p_{3/4} = (0, \pm 10, 0)$

③ $z \neq 0 \Rightarrow \lambda = 50$ und $x = y = 0 \Rightarrow z^2 = 100$ $\quad p_{5/6} = (0, 0, \pm 10)$

④ $x = y = z = 0 \Rightarrow 100 = 0$ ↯