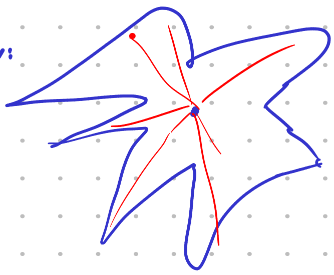
Kurvenintegrale II

$\rightsquigarrow$ konservativ $\Longleftrightarrow$ Gradientenvektorfeld !

$\rightsquigarrow$ D Sterngebiet:



$\exists\, x_0 \in D$ s.d. $\forall y \in D$: $\overline{x_0 y} \in D$

Auf Sterngebieten gilt: $\operatorname{rot} v = 0 \implies$ Gradientenvektorfeld

Differentialgleichungen

$D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f: D \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}^n$

System gewöhnlicher DGL 1. Ordnung ist $y' = f(x,y)$

Lösung ist eine C^1-Abb. $\varphi: I \to \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall mit

i) $(x, \varphi(x)) \in D \quad \forall x \in I$

ii) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$

AWP

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{mit } (x_0, y_0) \in D$$

Spezialfall: $n = 1$, lineare DGL

$$y' = a(x)\, y + \underbrace{b(x)}_{\text{Inhomogenität}}$$

$\implies$ Lösung: Falls $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $a: I \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$, dann hat das AWP

$$\begin{cases} y' = a(x)\, y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{eind. Lsg: } \varphi(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt \right)$$

Mit Inhomogenität: $\begin{cases} y' = a(x)\, y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ mit $a, b : I \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$

hat eindeutige Lsg.: $$\varphi(x) = e^{A(x)} \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)}\, dt \right]$$ mit

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt$$

A1| a) und b) einsetzen!

c) Dazu zeigen wir, dass für Lösungen φ_1, φ_2 und $c \in \mathbb{R}$ bel. auch $\varphi_1 + c\varphi_2$ Lösung ist. Also

$$(\varphi_1 + c\varphi_2)''(x) = \varphi_1''(x) + c\,\varphi_2''(x) = -a^2\varphi_1(x) - c\,a^2\varphi_2(x)$$
$$= -a^2(\varphi_1(x) + c\,\varphi_2(x))$$

$\square$

d) folgt direkt aus c)

e) Es ist $y(x) = b\cos(x) + c\sin(x)$ eine Lösung. Setze nun an:

$$1 \overset{!}{=} y(0) = b\cos(0) + c\sin(0) = b \Rightarrow b = 1$$
$$5 \overset{!}{=} y'(0) = -b\sin(0) + c\cdot\cos(0) = c \Rightarrow c = 5$$

Also löst $y(x) = \cos(x) + 5\sin(x)$ das AWP.

A2| $y' = a(x)\,y + b(x)$

a) $a(x) = 2x$ also $y' = 2xy$.

Nach VL ist $\varphi_0(x) = c\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt\right)$

$$= c\exp\left(\int_{x_0}^{x} 2t\,dt\right) = c\exp(x^2 - x_0^2)$$

eine Lösung der homogenen Gleichung.

Variation der Konstanten: Ansatz $\varphi(x) = c(x)\exp(x^2 - x_0^2)$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = c'(x)\exp(x^2 - x_0^2) + 2x\,c(x)\exp(x^2 - x_0^2) \overset{!}{=} 2x\,\varphi(x) + x^3$$
$$= 2x\,c(x)\exp(x^2 - x_0^2) + x^3$$

$$\Rightarrow c'(x)\exp(x^2 - x_0^2) \overset{!}{=} x^3$$
$$\Rightarrow c'(x) = x^3\exp(x_0^2 - x^2)$$

Mit $\varphi(x_0) = c(x_0) \overset{!}{=} y_0$ folgt

$$c(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} t^3\exp(x_0^2 - t^2)\,dt = y_0 + \frac{1}{2}\left(-(x^2+1)\exp(x_0^2 - x^2) + x_0^2 + 1\right)$$

Also
$$\varphi(x) = \left[y_0 + \frac{1}{2}\left(-(x^2+1)\exp(x_0^2 - x^2) + x_0^2 + 1\right)\right]\exp(x^2 - x_0^2)$$
$$= \left(y_0 + \frac{1}{2}x_0^2 + \frac{1}{2}\right)\exp(x^2 - x_0^2) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

b) Analoger Ansatz wie in (a), dies-mal ohne Anfangsbedingungen.

$a(x) = -\sin(x)$, $b(x) = \sin^3(x)$, also:

$$y'(x) = -\sin(x)\, y(x) \overset{VL}{\Rightarrow} y(x) = c \exp\left(\int^x -\sin(t)\, dt \right)$$

$$= c \exp(\cos(x))$$

Variation der Konstanten: $y(x) = c(x) \exp(\cos x)$

$$\Rightarrow y'(x) = c'(x) \exp(\cos x) - c(x) \exp(\cos x) \sin(x)$$

$$\overset{!}{=} -\sin(x)\, c(x) \exp(\cos(x)) + \sin^3(x)$$

$$\Rightarrow c'(x) = \sin^3(x) \exp(-\cos x)$$

$$c(x) = d + \int^x \sin^3(t) \exp(-\cos(t))\, dt$$

$$= d + \int^s \exp(-u)\,(u^2-1)\, du \qquad C^1 \text{ Subst: } \frac{du}{dt} = -\sin(t), \quad u = \cos(t)$$

$$= d + \int^s u^2 \exp(-u)\, du - \int^s \exp(-u)\, du \qquad s := \cos(x)$$

Betrachte:

$$\int^s u^2 \exp(-u)\, du = -\exp(-u)\, u^2 \Big|^s + \int^s \exp(-u)\, 2u\, du$$

$$= -\exp(-s)\, s^2 - \exp(-u)\, 2u \Big|^s + \int^s 2\exp(-u)\, du$$

$$= -\exp(-s)\left[s^2 + 2s + 2 \right]$$

$$\Rightarrow c(x) = d - \exp(-s)\left[s^2 + 2s + 2 \right] + \exp(-s) = d - \exp(-s)\left[s^2 + 2s + 1 \right]$$

$$\Rightarrow c(x) = d - \exp(-\cos x)\left[\cos^2 x + 2\cos x + 1 \right]$$

Also: $y(x) = d \exp(\cos x) - [\cos(x) + 1]^2$

Aus $x_0 = \pi/2$, $y_0 = 5$ kann d bestimmt werden.

c) $y'(x) = a\, y(x) + \sin(x) + e^{-5x}$. Sei $a \neq 0$.

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a\, dt = a(x - x_0)$$

$$B(x) := \int_{x_0}^{x} \left[\sin(t) + \exp(-5t) \right] \exp(a(x_0 - t))\, dt = \exp(ax_0) \left(\int_{x_0}^{x} \sin(t) \exp(-at) + \exp(-5t - at)\, dt \right)$$

Betrachte $\int_{x_0}^{x} \sin(t) \exp(-at)\, dt = -\frac{1}{a} \exp(-at) \sin(t) \Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{a} \exp(-at) \cos(t)\, dt$

$$= -\frac{1}{a} \exp(-at) \sin(t) \Big|_{x_0}^{x} - \frac{1}{a^2} \exp(-at) \cos(t) \Big|_{x_0}^{x} - \frac{1}{a^2} \int_{x_0}^{x} \exp(-at) \sin(t)\, dt$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{a^2}\right) \int_{x_0}^{x} \sin(t) \exp(-t)\, dt = -\frac{1}{a^2} \exp(-at) \left[a \sin(t) + \cos(t) \right] \Big|_{x_0}^{x}$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} \sin(t) \exp(-t)\, dt = -\frac{1}{1+a^2} \exp(-ax) \left[a \sin(x) + \cos(x) \right] + c_1 \quad \text{für ein } c_1 \in \mathbb{R}$$

Also folgt $B(x) = \exp(a x_0) \left(-\frac{1}{1+a^2} \exp(-ax) \left[a \sin(x) + \cos(x) \right] - \frac{1}{5+a} \exp(-(5+a)x) \right) + c_2$

Also $y(x) = \exp(a(x-x_0)) \left[c_3 + \exp(a x_0) \left(-\frac{1}{1+a^2} \exp(-ax) \left[a \sin(x) + \cos(x) \right] - \frac{1}{5+a} \exp(-(5+a)x) \right) \right]$

$$= c_3 \exp(a(x-x_0)) - \frac{1}{1+a^2} \left[a \sin(x) + \cos(x) \right] - \frac{1}{5+a} \exp(-5x)$$

$$y' = ay + \sin(x) + e^{-5x}$$

$$y'(x) = c_3 \exp(a(x-x_0))\, a - \frac{1}{1+a^2} \left[a \cos(x) - \sin(x) \right] + \frac{5}{5+a} \exp(-5x)$$

$$= c_3 \exp(a(x-x_0))\, a - \frac{a}{1+a^2} \left[\cos(x) + a \sin(x) \right] - \frac{a}{5+a} \exp(-5x)$$

$$+ \frac{a}{1+a^2} \left[\cos(x) + a \sin(x) \right] + \frac{a}{5+a} \exp(-5x) - \frac{1}{1+a^2} (a \cos(x) - \sin x) + \frac{5}{5+a} \exp(-5x)$$

$$= ay + \frac{a}{1+a^2} \left[\cos(x) + a \sin x \right] + \frac{1}{1+a^2} \left[-a \cos x + \sin x \right] + \exp(-5x)$$

$$= ay + \frac{a}{1+a^2} \cos x + \frac{a^2}{1+a^2} \sin x - \frac{a}{1+a^2} \cos x + \frac{1}{1+a^2} \sin x + \exp(-5x)$$

$$= ay + \sin x + \exp(-5x) \quad \checkmark$$