

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	Σ
Punkte					

Aufgabe 1. a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ abzählbar. Beh.: $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $\lambda(A) = 0$.

Beweis. Zunächst sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $\{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, da abgeschlossen. Betrachte nun

$$A_n := [x, x + \frac{1}{n}) \downarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{x\}.$$

Da A_n linksgeschlossene Intervalle für $n \in \mathbb{N}$, ist $\lambda([x, x + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$. Damit folgt, da λ Maß

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n) = \lambda(\{x\}).$$

Sei nun $(q_i)_{i \in I}$ Abzählung von A mit $I \subseteq \mathbb{N}$ und $q_i \neq q_j$ für $i \neq j$ und $q_i \in A$. Dann ist

$$A = \bigcup_{i \in I} \{q_i\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Weiter gilt mit σ -Additivität von λ und der Vorüberlegung:

$$\lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{i \in I} \{q_i\}\right) = \sum_{i \in I} \lambda(\{q_i\}) = \sum_{i \in I} 0 = 0.$$

□

b) Sei $\alpha > 0$. Beh.: $\alpha A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $\lambda(\alpha A) = \alpha \lambda(A)$.

Beweis. Zunächst ist $f_\alpha: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $A \mapsto \alpha A$ eine inklusionserhaltende Bijektion.

Sei $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Es sei $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ die Menge der linksgeschlossenen Intervalle. Da $\sigma(\mathcal{J}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und für $I \in \mathcal{J} \implies I^c \in \mathcal{J}$, existieren $I_k \in \mathcal{J}$, s.d.

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \text{ oder } A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k.$$

Sei o.E. $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$. Für $I \in \mathcal{J}$ ex. $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$, s.d. $I = [a, b)$. Dann ist $\alpha I = [\alpha a, \alpha b) \in \mathcal{J}$ und damit

$$\lambda(\alpha I) = \lambda([\alpha a, \alpha b)) = |\alpha a - \alpha b| = \alpha |a - b| = \alpha \lambda(I).$$

Damit folgt

$$\alpha A = \alpha \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \alpha I_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Betrachte nun $\tilde{I}_k := I_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} I_j$. Dann sind die $\tilde{I}_k$ disjunkte Vereinigung von endlich vielen linksgeschlossenen Intervallen. Durch Ummummerierung und Aufteilung der Vereinigung auf mehrere Folgeelemente, sei o.E. $\tilde{I}_k \in \mathcal{J} \forall k \in \mathbb{N}$ und

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \tilde{I}_k.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha A) &= \lambda\left(\alpha \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \tilde{I}_k\right) \\ &\stackrel{f_\alpha \text{ inklusionserhaltend}}{=} \lambda\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \alpha \tilde{I}_k\right) \\ &\stackrel{\lambda \text{ } \sigma\text{-additiv}}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(\alpha \tilde{I}_k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha \lambda(\tilde{I}_k) \\ &= \alpha \lambda(A). \end{aligned}$$

□

c) Beh.: Für alle $\alpha > 0$ existiert eine Menge $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, s.d. A dicht in $\mathbb{R}$ und $\lambda(A) = \alpha$.

Beweis. Sei $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$ und sei o.E. $q_1 = 1$. Dann betrachte

$$A := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left[q_k - \frac{1}{2^k}, q_k + \frac{1}{2^k} \right].$$

Es ist $Q \subseteq A$, d.h. A dicht in $\mathbb{R}$, da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$.

Da $q_1 = 1$ ist $\left[1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \subseteq A$. Es ist wegen der Translationsinvarianz von λ weiter: $\lambda\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right) = \lambda([0, 1]) = 1$. Wegen der Monotonie von λ folgt damit $\lambda(A) \geq 1$. Weiter ist λ σ -subadditiv. Damit folgt

$$\begin{aligned} \lambda(A) &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda\left(\left[q_k - \frac{1}{2^k}, q_k + \frac{1}{2^k}\right]\right) \\ &\stackrel{\text{Translat. inv.}}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda\left(\left[0, \frac{1}{2^{k-1}}\right]\right) \\ &\stackrel{(b)}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{k-1}} \lambda(2^{k-1}[0, \frac{1}{2^{k-1}}]) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{k-1}} \lambda([0, 1]) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &\stackrel{\text{geom. Reihe}}{<} \infty. \end{aligned}$$

Es ist also $1 \leq \lambda(A) < \infty$, es ex. also ein $a \in \mathbb{R}$, s.d. $\lambda(A) = a$. Wähle nun $\beta := \frac{\alpha}{a}$. Damit folgt mit $B := \beta A$

$$\lambda(B) = \lambda(\beta A) = \beta \lambda(A) = \beta a = \alpha.$$

□

Aufgabe 2. a) Beh.: $\mathcal{H}^s$ ist ein äußeres Maß.

Beweis. (i) Es ist offensichtlich $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$.

(ii) Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mit $A \subseteq B$, dann ist jede Überdeckung von B auch eine Überdeckung von A . Damit folgt die Behauptung.

(iii) Sei $A_i \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ für $i \in \mathbb{N}$. Dann sei $\delta > 0$ und für $i \in \mathbb{N}$ $(B_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ eine Überdeckung von A_i , s.d.

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{diam}(B_{ij})^s = \mathcal{H}_\delta^s(A_i).$$

Dann ist

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subseteq \bigcup_{i, j \in \mathbb{N}} B_{ij}.$$

Also folgt

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i, j \in \mathbb{N}} \text{diam}(B_{ij})^s = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_\delta^s(A_i).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) &= \limsup_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \\ &\geq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_\delta^s(A_i) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \limsup_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A_i) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^s(A_i). \end{aligned}$$

□

b) Beh.: $\mathcal{H}^s(\alpha A) = \alpha^s \mathcal{H}^s(A)$.

Beweis. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $\alpha > 0$. Wie bereits in A1 ist f_α eine inklusionserhaltende Bijektion. Damit ist für $B_j \subseteq \mathbb{R}$:

$$A \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \iff \alpha A \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \alpha B_j.$$

Da offensichtlich $\text{diam}(\alpha A) = \alpha \text{diam}(A)$ und wegen $\alpha > 0$: $\text{diam}(B_j) \leq \delta \iff \text{diam}(\alpha B_j) = \alpha \text{diam}(B_j) \leq \alpha \delta$, folgt die Behauptung aus der Definition. $\square$

c) Beh.: $\mathcal{H}^s(A + y) = \mathcal{H}^s(A) \forall A \subseteq \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$.

Beweis. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$. Es ist analog zu A1 $f_y: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}), A \mapsto A + y$ inklusionserhaltende Bijektion. Außerdem ist $\text{diam}(A) = \text{diam}(A + y)$. Damit folgt die Behauptung aus der Definition analog zu (b). $\square$

d) Beh.: $\mathcal{H}^0$ ist das Zählmaß.

Beweis. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ endlich. Dann ex. ein $I \subseteq \mathbb{N}$, s.d. $A = (a_i)_{i \in I}$. Es ist weiter

$$A = \bigcup_{i \in I} \{a_i\}.$$

mit $\text{diam}(\{a_i\}) = 0$ für $i \in I$. Damit folgt

$$\sum_{i \in I} \text{diam}(\{a_i\})^0 = |I| = \#A.$$

Also für $\delta \rightarrow 0$ ist $\mathcal{H}_\delta^0(A) = \#A$, also $\mathcal{H}^0(A) = \#A$. Wegen der Monotonie von $\mathcal{H}^0$ ist für $B \subseteq \mathbb{R}$ unendlich, $\mathcal{H}^0(B) = \infty$. $\square$

Aufgabe 3. a) Beh.: ν äußeres Maß.

Beweis. (i) $\nu(\emptyset) = 0$, da $\emptyset$ endlich.

(ii) Seien $A, B \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $A \subseteq B$. Falls $\nu(B) = 1$: trivial. Sei also $\nu(B) = 0$. Dann ist B höchstens abzählbar, also A ebenfalls und es folgt

$$\nu(A) = 0 = \nu(B).$$

(iii) Sei $A_k \in \mathcal{P}(X)$ für $k \in \mathbb{N}$. Falls ein $n \in \mathbb{N}$ ex., s.d. A_k überabzählbar, ist auch $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ überabzählbar, also

$$\nu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = 1 \leq \underbrace{\nu(A_n)}_{=1} + \underbrace{\sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \neq n}} \nu(A_k)}_{\geq 0} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu(A_k).$$

Falls $\forall k \in \mathbb{N}$: A_k höchstens abzählbar, dann ist $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ höchstens abzählbar und es gilt

$$\nu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = 0 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu(A_k).$$

$\square$

b) Sei $\mathcal{M} := \{A \in \mathcal{P}(X) \mid \nu(E) = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap A^c) \quad \forall E \in \mathcal{P}(X)\}$.

Beh.: $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ höchstens abzählbar oder } A^c \text{ höchstens abzählbar}\} =: \mathcal{F}$

Beweis. Falls X abzählbar, dann ist $\nu(A) = 0 \forall A \in \mathcal{P}(X)$, also trivialerweise $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X) = \mathcal{F}$. Sei also X überabzählbar.

- „ $\subseteq$ “: Sei $A \in \mathcal{M}$. Falls A höchstens abzählbar, folgt direkt $A \in \mathcal{F}$. Sei also A überabzählbar. Dann ist mit $E = X$:

$$1 = \nu(X) = \nu(X \cap A) + \nu(X \cap A^c) = \underbrace{\nu(A)}_{=1} + \nu(A^c) = 1 + \nu(A^c).$$

Also $\nu(A^c) = 0$, also A^c höchstens abzählbar und damit $A \in \mathcal{F}$, also $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}$.

- „ $\supseteq$ “: Sei $A \in \mathcal{F}$ und $E \subseteq X$ beliebig. Falls A und E höchstens abzählbar sind $E \cap A$ und $E \cap A^c$ ebenfalls höchstens abzählbar, also folgt

$$\nu(E) = 0 = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap A^c) \implies A \in \mathcal{M}.$$

Falls A höchstens abzählbar und E überabzählbar folgt mit der Subadditivität von ν :

$$1 = \nu(E) \leq \underbrace{\nu(E \cap A)}_{\substack{=0 \\ \text{da } A \text{ abzählbar}}} + \underbrace{\nu(E \cap A^c)}_{\leq 1}.$$

Also folgt $\nu(E \cap A^c) = 1$ und damit $A \in \mathcal{M}$.

Falls A überabzählbar und E höchstens abzählbar sind $E \cap A$ und $E \cap A^c$ ebenfalls höchstens abzählbar, also $A \in \mathcal{M}$.

Falls A und E überabzählbar ist A^c höchstens abzählbar, da $A \in \mathcal{F}$ und damit wegen Subadditivität von ν :

$$1 = \nu(E) \leq \underbrace{\nu(E \cap A)}_{\leq 1} + \underbrace{\nu(E \cap A^c)}_{=0} \implies \nu(E \cap A) = 1 \implies A \in \mathcal{M}.$$

Also insgesamt $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$.

□

Aufgabe 4. Beh.: μ ist ein Maß.

Beweis. (i) $\mu(\emptyset) = 0$, denn $\#(\emptyset \cap \{1, \dots, n\}) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) Sei $A_i \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ für $i \in \mathbb{N}$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \# \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \cap \{1, \dots, n\} \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \# \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cap \{1, \dots, n\}) \right) \\ &\stackrel{\text{disj. Ver.}}{=} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathbb{N}} \#(A_i \cap \{1, \dots, n\}) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#(A_i \cap \{1, \dots, n\}) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i). \end{aligned}$$

□