Aufgabe	A40	A41	A42	A43	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 40. Sei R ein nullteilerfreier Ring und M ein R-Modul.

(a) Beh.: Auf der Menge $R \times (R \setminus \{0\})$ wird durch $(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2) \iff r_1 s_2 = r_2 s_1$ eine Äquivalenzrelation definiert.

Beweis. Reflexivität und Symmetrie sind klar.
Seien weiter $r_1, r_2, r_3 \in R$ und $s_1, s_2, s_3 \in R \setminus \{0\}$ mit $(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2)$ und $(r_2, s_2) \sim (r_3, s_3)$. Dann gilt

$$r_1 s_2 = r_2 s_1 \wedge r_2 s_3 = s_2 r_3.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \underbrace{r_1 s_2}_{=r_2 s_1} s_3 = \underbrace{r_2 s_3}_{=s_2 r_3} s_1 &= s_2 r_1 s_3 \\ \implies s_2(r_1 s_3) &= s_2(s_1 r_3) \\ \implies s_2(r_1 s_3 - s_1 r_3) &= 0. \end{aligned}$$

Da $s_2 \neq 0$ und R nullteilerfrei, folgt

$$r_1 s_3 - s_1 r_3 = 0 \implies r_1 s_3 = s_1 r_3 \implies (r_1, s_1) \sim (r_3, s_3).$$

Das zeigt die Transitivität von $\sim$ und damit die Behauptung. □

(b) Beh.: Die Operationen

$$\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} := \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2} \quad \text{und} \quad \frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2} := \frac{r_1 r_2}{s_1 s_2}$$

sind wohldefiniert.

Beweis. Seien $r_1, \tilde{r}_1, r_2 \in R$ und $s_1, \tilde{s}_1, s_2 \in R \setminus \{0\}$ mit $(r_1, s_1) \sim (\tilde{r}_1, \tilde{s}_1)$.
Z.z.: $(r_1 s_2 + r_2 s_1, s_1 s_2) \sim (\tilde{r}_1 s_2 + r_2 \tilde{s}_1, \tilde{s}_1 s_2)$. Es ist

$$\begin{aligned} (r_1 s_2 + r_2 s_1)\tilde{s}_1 s_2 &= r_1 s_2 \tilde{s}_1 s_2 + r_2 s_1 \tilde{s}_1 s_2 \\ &\overset{r_1 \tilde{s}_1 = \tilde{r}_1 s_1}{=} s_1 s_2 \tilde{r}_1 s_2 + r_2 s_1 \tilde{s}_1 s_2 \\ &= s_1 s_2 (\tilde{r}_1 s_2 + r_2 \tilde{s}_1). \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.
Z.z.: $(r_1 r_2, s_1 s_2) \sim (\tilde{r}_1 r_2, \tilde{s}_1 s_2)$. Es ist

$$r_1 r_2 \tilde{s}_1 s_2 \overset{r_1 \tilde{s}_1 = \tilde{r}_1 s_1}{=} s_1 s_2 \tilde{r}_1 r_2.$$

Damit folgt die Behauptung.
Wohldefiniertheit folgt für zweites Argument aus Symmetriegründen. □

(c) Beh.: Auf der Menge $M \times (R \setminus \{0\})$ wird durch

$$(x_1, r_1) \sim (x_2, r_2) \iff \exists s \in R \setminus \{0\} \text{ mit } s r_1 x_2 = s r_2 x_1$$

eine Äquivalenzrelation definiert.

Beweis. Reflexivität und Symmetrie sind klar.
Seien weiter $x_1, x_2, x_3 \in R$ und $r_1, r_2, r_3 \in R \setminus \{0\}$ mit $(x_1, r_1) \sim (x_2, r_2)$ und $(x_2, r_2) \sim (x_3, r_3)$. Dann ex. $s_1, s_2 \in R \setminus \{0\}$ mit $s_1 r_1 x_2 = s_1 r_2 x_1$ und $s_2 r_2 x_3 = s_2 r_3 x_2$.
Definiere $s := s_1 s_2 r_2$. Es ist $s \neq 0$, da $s_1, s_2, r_2 \in R \setminus \{0\}$ und R nullteilerfrei. Dann folgt

$$s_1 s_2 r_2 \cdot r_1 x_3 = s_1 r_1 \underbrace{s_2 r_2 x_3}_{=s_2 r_3 x_2} = s_2 r_3 \underbrace{s_1 r_1 x_2}_{s_1 r_2 x_1} = s_1 s_2 r_2 \cdot r_3 x_1.$$

Das zeigt die Transitivität von $\sim$ und damit die Behauptung. □

(d) Beh.: Mit $R = \mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist die gegebene Relation nicht transitiv.

Beweis. Es ist
$$(\overline{1}, 1) \sim (\overline{0}, 2) \wedge (\overline{0}, 2) \sim (\overline{0}, 1),$$
denn $\overline{1} \cdot 2 = \overline{0} = 1 \cdot \overline{0}$ und $\overline{0} \cdot 1 = \overline{0} = 2 \cdot \overline{0}$. Aber $\overline{1} \cdot 1 = \overline{1} \neq \overline{0} = 1 \cdot \overline{0}$. Also ist $(\overline{1}, 1) \not\sim (\overline{0}, 1)$ □

Aufgabe 41. (a) Beh.: Seien R ein nullteilerfreier Ring und M ein e.e. R-Modul. Dann sind die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) M ist ein Torsions-R-Modul

(ii) Es gilt $\mathrm{Ann}(M) \neq (0)$

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Sei $T(M) = M$. Da M e.e. existiert ein endliches ES. $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq M$ von M. Da $x_1, \ldots, x_n \in M = T(M)$ existieren $s_1, \ldots, s_n \in R \setminus \{0\}$ mit
$$x_1 s_1 = x_2 s_2 = \ldots = x_n s_n = 0 \quad (*).$$
Wähle $a := s_1 \cdot \ldots \cdot s_n$. Es ist $a \neq 0$, da $s_1, \ldots, s_n \neq 0$ und R nullteilerfrei. Sei nun $m \in M$ beliebig. Dann ex. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R$ mit $m = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$. Damit folgt
$$am = \sum_{i=1}^n a\alpha_i x_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i s_1 \cdot \ldots \cdot s_n x_i \stackrel{(*)}{=} 0.$$
Damit ist $0 \neq a \in \mathrm{Ann}(M)$, also $\mathrm{Ann}(M) \neq (0)$.

(ii) $\implies$ (i): Sei $a \in \mathrm{Ann}(M)$ mit $a \neq 0$. Dann gilt $\forall m \in M$: $am = 0$. Da $a \neq 0$ folgt $m \in T(M)$, also $M = T(M)$. □

(b) Sei $R = \mathbb{Z}$ und $M = \oplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$.

Beh.: M ist ein Torsions-R-Modul.

Beweis. Sei $m \in M$ beliebig. Dann ex. $m_i \in \mathbb{Z}/2^i\mathbb{Z}$ mit $m = (m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ wobei $m_i = 0$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$. Es ex. also eine Indexmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ mit $\#I < \infty$ s.d. $m_i \neq 0 \; \forall i \in I$ und $m_i = 0 \; \forall i \in \mathbb{N} \setminus I$.

Definiere nun
$$a := \prod_{i \in I} 2^i.$$
a ist wohldefiniert, da I endlich ist. Außerdem gilt $a \neq 0$ da $2^i \neq 0 \; \forall i \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ nullteilerfrei. Weiter gilt $\forall i \in I$: $a \cdot m_i = 0$, denn $\exists r_i \in \mathbb{Z}$ mit $m_i = r_i + \mathbb{Z}/2^i\mathbb{Z}$. Da $2^i \mid a$ ex. $s_i \in \mathbb{Z}$ mit $a = s_i \cdot 2^i$. Damit folgt
$$am_i = a\left(r_i + 2^i\mathbb{Z}\right) = s_i r_i 2^i + 2^i\mathbb{Z} = 2^i\mathbb{Z} = \overline{0} \in \mathbb{Z}/2^i\mathbb{Z}.$$
Insgesamt folgt damit $(am)_i = 0 \; \forall i \in \mathbb{N}$, also $am = 0$. □

Beh.: $\mathrm{Ann}(M) = (0)$.

Beweis. Ang. $\exists a \in \mathrm{Ann}(M)$ mit $a \neq 0$. Dann ist $a \in \mathbb{Z}$ und es ex. $k \in \mathbb{N}$ s.d. $2^k > |a|$. Damit folgt $2^k \nmid a$, also $a \not\equiv 0 \pmod{2^k}$ $(*)$. Wähle nun $m := (m_1, m_2, \ldots)$ mit
$$m_i = \begin{cases} 0 & i \neq 2^k \\ \overline{1} & i = 2^k \end{cases}.$$
Es ist $m_i = 0$ für fast alle $i \in N$ also $m \in M$, aber
$$a \cdot m_k = a \cdot \overline{1} = a + 2^i\mathbb{Z} \stackrel{(*)}{\neq} 0.$$
Damit folgt $am \neq 0$, also $a \notin \mathrm{Ann}(M)$ ↯. □

Aufgabe 42. Sei M der $\mathbb{R}[t]$-Modul $\mathbb{R}[t]/(t^2)$.

(a) Beh.: $T(M) = M$.

Beweis. Sei $\overline{f} \in \mathbb{R}[t]/(t^2)$ beliebig. Dann wähle $a := t^2 \in \mathbb{R}[t]$. Es ist $a \neq 0$ und

$$am = t^2 f + (t^2) = (t^2) = 0 \in \mathbb{R}[t]/(t^2).$$

□

Beh.: $\text{Rang}(M) = 0$.

Beweis. Sei $m \in M$. Dann ist $m \in T(M)$. Also ex. $s \in \mathbb{R}[t] \setminus \{0\}$ mit $sm = 0$. Also ist m linear abhängig. Die max. Anzahl l.u. Elemente in M ist also 0. Damit folgt die Behauptung. □

(b) Beh (i).: $\mathcal{B} = \{\overline{1}, \overline{t}\}$ ist Basis von $\mathbb{R}[t]/(t^2)$ als $\mathbb{R}$-Modul.

Beweis. Sei $\overline{f} \in \mathbb{R}[t]/(t^2)$ beliebig. $\mathbb{R}$ ist Körper, also ist $\mathbb{R}[t]$ Euklidscher Ring. Also existieren $r, q \in \mathbb{R}[t]$ mit $\deg(r) < \deg(t^2) = 2$ und

$$f = qt^2 + r.$$

Da $\deg(r) < 2$ ex. $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ mit

$$r = a_0 + a_1 t.$$

Damit folgt

$$\overline{f} = f + (t^2) = qt^2 + r + (t^2) = a_0 + a_1 t + (t^2) = a_0\overline{1} + a_1\overline{1}.$$

Also ist $\mathcal{B}$ ES. von $\mathbb{R}[t]/(t^2)$ als $\mathbb{R}$-Modul.

Seien außerdem weiter $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$a\overline{1} + b\overline{t} = 0 \implies a + bt + (t^2) = 0 \implies a + bt \in (t^2).$$

Wegen $\deg(a + bt) \leq 1$ folgt $a = b = 0$. Also $\mathcal{B}$ l.u. und $\mathcal{B}$ Basis von $\mathbb{R}[t]/(t^2)$ als $\mathbb{R}$- Modul. □

Beh.: $\mathbb{R}[t]/(t^2)$ ist torsionsfreier $\mathbb{R}$-Modul vom Rang 2.

Beweis. Wegen (i) ist $\mathbb{R}[t]/(t^2)$ frei mit Rang 2 als $\mathbb{R}$-Modul und damit auch torsionsfrei nach VL. □

(c) Beh.: $\ell(M) = 2$ mit Kompositionsfaktoren $t/(t^2)$ und $\mathbb{R}[t]/(t^2)$.

Beweis. Nach VL sind die Untermoduln von $\mathbb{R}[t]/(t^2)$ gerade die Untermoduln N von $\mathbb{R}[t]$ mit $(t^2) \subseteq N$. Diese sind gerade die Ideale N im HIR $\mathbb{R}[t]$ mit $(t^2) \subseteq N$, also $\{(t^2), (t), (1)\}$. Damit sind die Untermoduln von $\mathbb{R}[t]/(t^2)$ gegeben als

$$\left\{(t^2)/(t^2), (t)/(t^2), (1)/(t^2)\right\} = \left\{0, (t)/(t^2), \mathbb{R}[t]/(t^2)\right\}.$$

Als längste Filtrierung ergibt sich damit sofort

$$0 \subsetneq (t)/(t^2) \subsetneq \mathbb{R}[t]/(t^2).$$

Also folgt $\ell(M) = 2$. Die Kompositionsfaktoren ergeben sich unter Benutzung der Isomorphiesätze der VL als:

$$((t)/(t^2))/0 \stackrel{\sim}{=} (t)/(t^2)$$
$$((1)/(t^2))/((t)/(t^2)) \stackrel{\sim}{=} (1)/(t) = \mathbb{R}[t]/(t^2).$$

Diese sind nach VL einfach, da die Filtrierung Länge $2 = \ell(M)$ hat. □

Aufgabe 43. Seien R ein Ring und M, N zwei R-Moduln und $\varphi\colon M \to N$ ein R-Mod.hom.

(a) Beh.: Es gilt $\ell(\ker\varphi) = \ell(\text{im}\,\varphi) = \ell(M)$.

Beweis. Definiere $\tilde{\varphi}\colon M \to \text{im}\,\varphi$, $m \mapsto \varphi(m)$. Dann ist $\tilde{\varphi}$ surjektiv. Sei weiter $\iota\colon \ker\varphi \to M$ die kanonische Inklusion. Da ι injektiv und $\text{im}\,\iota = \ker\varphi = \ker\tilde{\varphi}$ ist die kurze Folge

$$0 \to \ker\varphi \to M \to \text{im}\,\varphi \to 0$$

exakt. Also folgt $\ell(\ker\varphi) + \ell(\text{im}\,\varphi) = \ell(M)$. □

(b) Beh.: Für $\ell(M) < \infty$ gilt $\ell(L) < \ell(M)$ für jeden echten R-Untermodul $L \subsetneqq M$.

Beweis. Sei $\ell(M) = n$ und $L \subsetneqq M$ Untermodul. Ang.: $\ell(L) \geq n$. Dann ex. Filtrierung von L der Länge n:

$$0 \subsetneqq L_1 \subsetneqq L_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq L_n = L.$$

Dann ist aber

$$0 \subsetneqq L_1 \subsetneqq L_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq L \subsetneqq M$$

eine Filtrierung von M der Länge $n + 1$ ↯. □

(c) Beh.: Für $\ell(M) < \infty$ und $N = M$ gilt

$$\varphi \text{ injektiv} \iff \varphi \text{ surjektiv} \iff \varphi \text{ bijektiv}.$$

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Sei φ injektiv. Dann ist $\ker\varphi = 0$. Also $\ell(\ker\varphi) = 0$. Damit folgt aus (a)

$$\ell(M) = \ell(\ker\varphi) + \ell(\operatorname{im}\varphi) = \ell(\operatorname{im}\varphi).$$

Da $\ell(M) < \infty$ und $\operatorname{im}\varphi$ Untermodul von M, aber $\ell(\operatorname{im}\varphi) = \ell(M)$ folgt mit (b), dass $\operatorname{im}\varphi$ kein echter Untermodul von M ist. Also folgt $\operatorname{im}\varphi = M$, also φ surjektiv.

(ii) $\implies$ (iii): Sei φ surjektiv. g.z.z. φ injektiv. Es folgt aus (a):

$$\begin{aligned}\ell(M) &= \ell(\operatorname{im}\varphi) + \ell(\ker\varphi)\\ &= \ell(M) + \ell(\ker\varphi).\end{aligned}$$

Da $\ell(M) \in \mathbb{N}_0$ folgt $\ell(\ker\varphi) = 0$. Also nach VL $\ker\varphi = 0$, also φ injektiv.

(iii) $\implies$ (i): trivial. □