Algebra Blatt 10 Christian Merten, Ziche Li

A1	A2	A3	A4	A5	Σ

A1 (a) Die Untermoduln von $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$ sind gerade die Untermoduln von $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ die $\mathbb{Z}$ umfassen.

Und $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}] \supsetneq \mathbb{Z}[\frac{1}{p^2}] \supsetneq \mathbb{Z}[\frac{1}{p^4}] \ldots$ absteigende Kette, also $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$ nicht artinsch.

Aber $\mathbb{Z}[T] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$, $T \mapsto \frac{1}{p}$ ist surj. also $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ e.e. $\mathbb{Z}$-Algebra und $\mathbb{Z}$ noethersch, also $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ und damit auch $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$ noethersch.

(b) $(T_i^2 \mid i \in \mathbb{N}) \subsetneq (T_1, T_i^2 \mid i \in \mathbb{N}) \subsetneq (T_1, T_2, T_i^2 \mid i \in \mathbb{N}) \ldots$ ist aufsteigende Kette von Idealen die $(T_i^2 \mid i \in \mathbb{N})$ umfassen, also aufsteigende Kette in $\mathbb{C}[T_i \mid i \in \mathbb{N}]/(T_i^2 \mid i \in \mathbb{N}) =: B$.

Also B nicht noethersch und damit insbes. nicht artinsch.

(c) Es ist $(x \mapsto x) \subsetneq (x \mapsto x^{1/2}) \subsetneq (x \mapsto x^{1/4}) \ldots$ echt aufsteigende Kette von Idealen, also $C([0,1], \mathbb{R})$ weder noethersch noch artinsch.

A2 $\varphi: M \to M$ surj. Endom. eines noeth. A-Moduls

Beh. φ Iso

Bew. Es genügt, dass $\ker\varphi = 0$. Dazu betrachte $\ker\varphi \subseteq \ker\varphi^2 \subseteq \ker\varphi^3 \ldots$

Da M noethersch wird diese Folge stationär. Also ex. ein $n \in \mathbb{N}$ sd. $\ker\varphi^n = \ker\varphi^{n+1}$.

Sei nun $x \in \ker\varphi$. Da φ surj. ist auch φ^n surj. und es ex. ein $y \in M$ sd. $x = \varphi^n(y)$. Da $0 = \varphi(x) = \varphi(\varphi^n(y)) = \varphi^{n+1}(y)$ folgt $y \in \ker\varphi^{n+1} = \ker\varphi^n$, also $x = \varphi^n(y) = 0$. $\square$

A3 (a) **Beh.** $\exists\ V(f_1,\ldots,f_k) \xrightarrow[\text{kan}]{\sim} \mathrm{Hom}_{K\text{-Alg}}(A/(f_1,\ldots,f_k), K)$

Bew. Für $x \in V(f_1,\ldots,f_k)$ setze $\varphi_x: A/_{(f_1,\ldots,f_k)} \longrightarrow K$, $\bar{f} \longmapsto f(x)$.

Dies ist wohldefiniert, da für $f,g \in A$ mit $\bar{f} = \bar{g}$ ist $f-g \in (f_1,\ldots,f_k)$ also $(f-g)(x) = 0$ also $f(x) = g(x)$. Außerdem ist φ_x K-Algebrahom., da offensichtlich K-linear und multiplikativ. Außerdem ist $\varphi_x(\bar{1}) = 1(x) = 1$.

Also ist $\Phi: V(f_1,\ldots,f_k) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{K\text{-Alg}}(A/_{(f_1,\ldots,f_k)}, K)$, $x \mapsto \varphi_x$ wohldefiniert.

Umgekehrt setze: $\Psi: \mathrm{Hom}_{K\text{-Alg}}(A/_{(f_1,\ldots,f_k)}, K) \longrightarrow V(f_1,\ldots,f_k)$, $\varphi \mapsto (\varphi(\bar{T}_1),\ldots,\varphi(\bar{T}_n))$

Dann ist für $\varphi \in \mathrm{Hom}_{K\text{-Alg}}(A/_{(f_1,\ldots,f_k)}, K)$: Für geeignete $a_{ls}, b_{ls} \in K$ gilt

$$f_i = \sum_{l=0}^{n}\sum_{s=0}^{r_{al}} a_{ls} T_l^s \quad \text{ist} \quad f_i(\Psi(\varphi)) = \sum_{l=0}^{n}\sum_{s=0}^{r_{al}} a_{ls}\varphi(\bar{T}_l)^s \overset{\varphi\ K\text{-Alghom}}{=} \varphi\left(\overline{\sum_{l=0}^{n}\sum_{s=0}^{r_{al}} a_{ls} T_l^s}\right)$$

$$= \varphi(\bar{f}_i)$$

$$= 0$$

Es gilt $[\Phi(\Psi(\varphi))](\bar{f}) = [\Phi(\varphi(\bar{T}_1),\ldots,\varphi(\bar{T}_n))](\bar{f}) = f(\varphi(\bar{T}_1),\ldots,\varphi(\bar{T}_n)) = \sum_{l=0}^{n}\sum_{s=0}^{r_{bl}} b_{ls}\varphi(\bar{T}_l)^s$

$$\overset{\varphi\ K\text{-Alghom}}{=} \varphi(\bar{f})$$

$$\Psi(\Phi(x)) = \Psi(\varphi_x) = (\varphi_x(\bar{T}_1),\ldots,\varphi_x(\bar{T}_n)) = (T_1(x),\ldots,T_n(x)) = x$$

$\square$

(b) Sei $x = (x_1,\ldots,x_n) \in K^n$ bel. **Beh.** $(f_1,\ldots,f_k) \in (T_1 - x_1,\ldots,T_n - x_n) \iff x \in V(f_1,\ldots,f_k)$

Bew. „$\Rightarrow$". Es ist $f_i = \sum_{j=1}^{r} g_j(T_j - x_j)$. Da $(T_j - x_j)(x) = 0\ \forall j \in \{1,\ldots,n\}$ folgt $f_i(x) = 0\ \ \forall i \in \{1,\ldots,k\}$.

„$\Leftarrow$". $f_i(x) = 0\ \ \forall i = 1,\ldots,k$. Also betrachte $f_{ij} \in K[T_j]$ wobei in f_i T_s durch x_s ersetzt ist für $s \neq j$. Dann ist $f_{ij}(x_j) = 0$ und es ex. ein $g_{ij} \in K[T_j]$ mit $f_{ij} = g_{ij}(T_j - x_j)$.

Da $f_i(x) = 0$ folgt $f_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(T_j - x_j)$. $\square$

A4 (a) **Beh.** $\mathrm{Spec}(A)$ irreduzibel $\iff$ Nilradikal Primideal.

Bew. „$\Rightarrow$": Kontrapos. Sei $N(A)$ kein PI, dann ex. $x,y \in A$ mit $(xy)^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, aber $x,y \notin N(A)$. Dann folgt $V(x) \cup V(y) \overset{B1}{=} V(xy) \supseteq V(N(A)) = \mathrm{Spec}(A)$, da $N(A) = \bigcap_{p\ PI} p$. Da nun $x,y \notin N(A)$ folgt $x,y \notin \bigcap_{p\ PI} p$ also $V(x) \neq \mathrm{Spec}(A) \neq V(y)$. Also $\mathrm{Spec}(A)$ reduzibel.

„$\Leftarrow$" Kontrapos. Sei $V(N(A)) = \mathrm{Spec}(A) = V(a) \cup V(b)$ mit $a,b \subseteq A$ Ideale und $V(a) \neq \mathrm{Spec}(A) \neq V(b)$, also ~~M~~ $a,b \notin N(A)$ und $\mathrm{Spec}(A) = V(ab)$.

Also $ab \subseteq \bigcap_{p\ PI} p = N(A)$ also ex. $x \in a, y \in b$ mit $x,y \notin N(a)$ und $xy \in ab \subseteq N(A)$.

Also $N(A)$ kein PI

$\square$

(b) **Beh.** A nullteilerfrei $\iff$ $\mathrm{Spec}(A)$ irred. und A reduziert

Bew. Es ist A reduziert $\iff N(A) = (0)$ und $\mathrm{Spec}(A)$ irred. $\overset{(a)}{\iff} N(A)$ PI. Also folgt

$\mathrm{Spec}(A)$ irred. und A reduziert $\iff (0)$ PI $\iff A$ nullteilerfrei $\square$

A5 (a) (1) **Beh.** $2a = 0$ für $a \in A$.

Bew. $2a = (2a)^2 = 4a^2 = 4a \Rightarrow 0 = 2a$.

Beh. A nullteilerfrei $\Rightarrow A \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Bew. Betrachte $f = X^2 - X$. Da A nullteilerfrei ist $A \neq 0$ also $1 \neq 0$ und $\deg f = 2$ und f hat max. 2 NS, also $\#A \leq 2$. Da $A \neq 0$ ist $\#A = 2$. Also ist $\mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{hom}} A$ surj. und wegen $2a = 0\ \forall a \in A$ folgt $\ker(\mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{hom}} A) \supseteq 2\mathbb{Z}$. Da $2\mathbb{Z}$ max. Ideal, Kerne Ideale und $A \neq 0$ folgt mit Homsatz die Beh.

(2) **Beh.** Jedes PI ist maximal

Bew. Sei $p \subseteq A$ PI. Zz. A/p Körper. Dazu sei $\bar{x} \in A/p \setminus \{0\}$ bel. Dann ist $\bar{x}^2 = \overline{x^2} = \bar{x}$. Also $\bar{x}(\bar{x} - \bar{1}) = 0$. Da $\bar{x} \neq 0$ und A/p nullteilerfrei, folgt $\bar{x} = \bar{1}$ also insbes. $\bar{x} \in (A/p)^\times$ also A/p Körper.

(3) **Beh.** A lokal $\Rightarrow A \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Bew. Es ist $N(A) = \bigcap_{p\ PI} p$ aber A hat genau ein Maximalideal m und nach (2) ist dies das einzige PI, also folgt $N(A) = m$. Sei nun $x \in N(A)$. Dann ist $x^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Da A ein max. Ideal enthält ist $A \neq 0$. Also $n \geq 1$. Falls $n = 1$, dann $x = 0$. Sonst ist $x^n = x^2 x^{n-2} = x x^{n-2} = x^{n-1}$. Induktiv folgt $0 = x^n = x$, also $N(A) = 0$ und $N(A)$ PI also 0 PI, also A nullteilerfrei und nach (1) $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(4) Beh. A noethersch $\Leftrightarrow$ A endlich

Bew. „$\Leftarrow$" trivial. „$\Rightarrow$": Da jedes PI maximal und A noethersch, folgt A artinsch. Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ ist außerdem auch $A/\mathfrak{a}$ boolesch, da für $\bar{x} \in A/\mathfrak{a}$: $\bar{x}^2 = \overline{x^2} = \bar{x}$. Da A artinsch ist nach Bew von 21.15 $A \cong \prod_{i=1}^{n} A/\mathfrak{a}_i$ für $\mathfrak{a}_i \subseteq A$ Ideale und $A/\mathfrak{a}_i$ lokal und artinsch, also nach (3) $A/\mathfrak{a}_i \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, da $A/\mathfrak{a}_i$ boolesch. Insbes. folgt A endlich. $\square$

(b) Beh. Die Aussage ist falsch

Bew. Betrachte $A = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dieser ist boolesch da Multiplikation komponentenweise und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ boolesch. Für $\mathfrak{p} \subseteq A$ PI ist $A_\mathfrak{p}$ lokal und für $\frac{a}{s} \in A_\mathfrak{p}$: $\left(\frac{a}{s}\right)^2 = \frac{a^2}{s^2} = \frac{a}{s}$. Also $A_\mathfrak{p}$ lokaler boolescher Ring, also nach (a) $A_\mathfrak{p} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ also endlich und damit noethersch. Allerdings ist A unendlich, also nach (a) nicht noethersch. $\square$