Algebra Zettel 5

Christian Merten
Zichu Li

A1	A2	A3	A4	Σ

A1 | A nullteilerfrei

(a) Sei M A-Modul. Zz: M/TM torsionsfrei

Bew.: Sei $\overline{m} \in T\, M/TM$. Dann $\exists a \in A \setminus \{0\}$ mit $a\overline{m} = 0$ also $am \in TM$. Dann ex. aber ein $b \in A \setminus \{0\}$ s.d. $bam = 0$. Da A nullteilerfrei folgt $ab \neq 0$ und $m \in TM$ also $\overline{m} = 0$. $\square$

(b) Sei $f: M \to N$ A-Mod.hom. Zz: $f(TM) \subseteq TN$

Bew.: Sei $m \in TM$. Dann $\exists\, a \in A \setminus \{0\}$ s.d. $am = 0$. $0 = f(am) = \underset{\neq 0}{\underline{a}} f(m) \Rightarrow f(m) \in TN$. $\square$

(c) Sei $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ exakt.

Zz: $0 \to TM' \to TM \to TM''$ exakt.

Bew.: Wohldefiniert nach (b). • Es ist $0 = \ker f \supseteq \ker f|_{TM'} \supseteq 0$.

• Da $g \circ f = 0$ folgt insbes. wegen $f(TM') \subseteq TM$ auch $\operatorname{im} f|_{TM'} \subseteq \ker g|_{TM}$.

• Sei nun $m \in \ker g|_{TM}$. Dann ex. ein $m' \in M'$ sd $f(m') = m$.
Da $m \in TM$ $\exists a \in A \setminus \{0\}$ sd. $am = 0$. Dann gilt $f(am') = af(m') = am = 0$.
Da f inj. folgt $am' = 0$ also $m' \in TM'$, also $\ker g|_{TM} \subseteq \operatorname{im} f|_{TM'}$. $\square$

(d) Beh.: $0 \to TM \hookrightarrow M \xrightarrow{q} M \otimes_A Q(A)$ exakt.

Bew.: Es ist $TM \hookrightarrow M$ injektiv. Außerdem ist $M \otimes_A Q(A)$ frei als $Q(A)$-VR.
Insbes. torsionsfrei als $A \subseteq Q(A)$ VR insbes. als A-Modul. Also nach (b):
$q(TM) = 0$ also $q \circ (TM \hookrightarrow M) = 0$. Sei weiter $m \in \ker q$. Dann ist
$m \otimes 1 = 0$. Da $M \otimes_A Q(A) \cong Q(M)$ mit $m \otimes \frac{1}{1} \longmapsto \frac{m}{1}$, ex. ein $s \in A \setminus \{0\}$
mit $sm = 0 \Rightarrow m \in TM = \operatorname{im}(TM \hookrightarrow M)$.

Setze nun $M = \mathbb{Z}$ und $A = \mathbb{Z}$. Dann ist $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} Q(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}$ und $q(a) = a$ $\forall a \in \mathbb{Z}$.
Insbes. $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} = \operatorname{im} q$. $\square$

A2/ S_0 Menge der Nichtnullteiler von A.

(a) Bew. Falls $A = \{0\}$ ist $S_0 = A$ einzige mult. abgeschl. TM und $S_0^{-1}(A) = A$. Sei also $A \neq 0$.

S_0 ist multiplikativ abgeschl., denn für $s, s' \in S_0$ ist $ss' \in S_0$, denn ang. $\exists a \in A \setminus \{0\}$ mit $ass' = 0$. Da $s \in S_0$ und $a \neq 0$ folgt $as \neq 0$ und damit s' Nullteiler $\lightning$. Da 1 Einheit insb. kein NT folgt $1 \in S_0$. #

Per Def. ist S_0 die größte mult. abgeschl. nullteilerfreie TM in A, d.h. es genügt für $S \subseteq A$ mult. abgeschlossen zu zeigen, dass

$$S \subseteq S_0 \iff A \xrightarrow{\iota} S^{-1}A \text{ injektiv.}$$

Bew der Beh.: Es gilt $a \in \ker \iota \iff a = 0$ in $S^{-1}A \iff \exists s \in S: sa = 0$.

Also folgt $\ker \iota = 0 \iff \forall s \in S$ und $a \in A \setminus \{0\}: sa \neq 0 \iff \forall s \in S: s \in S_0$

$\iff S \subseteq S_0$

$\square$

(b) Bew. Es ist zu zeigen für $x \in S_0^{-1}A$: $x \in (S_0^{-1}A)^\times \iff x$ kein NT in $S_0^{-1}A$.

Dabei gilt „$\Rightarrow$" i.A., es b.z.z.: „$\Leftarrow$". Es gilt zunächst für $a, b \in A$, $s, t \in S_0$:

$$\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \overset{\text{df}}{\iff} \exists f \in S_0: f(at - bs) = 0 \overset{1 \in S_0}{\underset{f \text{ kein NT}}{\iff}} at - bs = 0 \iff at = bs.$$

Insbes. ist $\frac{a}{s} = \frac{0}{1} = 0 \iff a = 0$

Sei nun $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$ kein NT, dann gilt $\forall \frac{b}{t} \in S^{-1}A \setminus \{0\}$:

$\frac{a}{s}\frac{b}{t} \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0 \quad \forall b \in A \setminus \{0\}$. Also a kein NT, also $a \in S_0$

und damit $\frac{1}{a} \in S_0^{-1}A$. Dann ist $\frac{a}{s} \cdot \frac{s}{a} = 1$, also $\frac{a}{s}$ Einheit.

$\square$

(c) Bew. Sei in A jede Nichteinheit ein NT. Dann ist $S_0 = A^\times$. Da nach (a) $A \subseteq S_0^{-1}A$ und nun $\frac{1}{s} \in A \; \forall s \in S_0$ folgt $S_0^{-1}A \subseteq A$, also $A = S_0^{-1}A$.

$\square$

(d) $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $\quad S = \{1, 2, 4\}$

Dann ist $0 \notin S$, $1 \in S$ und S mult. abgeschl., aber $2 \cdot 3 = 6$ also 2 Nullteiler, insbes. ist $A \longrightarrow S^{-1}A$ nicht injektiv nach Bew von (a).

$\square$

A3 (a) Beh. Reduziertheit ist lokal

Bew. Setze $M := r((0))$ das Nilradikal von A. Dann ist M A-Modul. Nach VL ist dann für $p \subseteq A$ Primideal, $(A \setminus p)^{-1} M = M_p$ das Nilradikal von A_p.

D.h. es genügt $M = 0 \iff M_p = 0 \; \forall p$ PI einzusehen. Das gilt aber bereits nach VL.

$\square$

(b) Beh. Nein, betrachte $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Bew. Setze $A := \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Die pos. Teiler von 6 sind gerade $\{1, 2, 3, 6\}$.

Es ex. also genau vier Ideale in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$: $0A$, $1A$, $2A$, $3A$. Da A nicht nullteilerfrei sind nur $p := 2A$ und $q := 3A$ Primideale (da max. Ideale).

Es gilt nun dass $\frac{2}{1}A_p$ und $\frac{3}{1}A_q$ die max. Ideale in den lokalen Ringen A_p bzw A_q. Allerdings gilt $3 \notin 2A = \{0, 2, 4\}$ und $2 \notin 3A = \{0, 3\}$.

Aber $2 \in \operatorname{Ann}(3A)$ und $3 \in \operatorname{Ann}(2A)$ insbes. ist $\frac{2}{1}A_p = 0$ und $\frac{3}{1}A_q = 0$.

Da diese die einzigen Max.ideale in A_p bzw A_q folgt A_p, A_q Körper, insbes. nullteilerfrei. Aber A nicht nullteilerfrei.

$\square$

A4| (a) Beh. Für $f \in A$ ist $D(f)$ quasikompakt.

Bew. Nach B4 ist $D(1) = \mathrm{Spec}(A)$, d.h. das insbes. folgt aus der ersten Beh.

Da die $D(f)$ eine Basis der Top. bilden, genügt es Überdeckungen der Form $(D(f_i))_{i\in I}$ zu betrachten. Sei also $f \in A$ bel. und $(D(f_i))_{i \in I}$ Überdeckung von $D(f)$, also $D(f) \subseteq \bigcup_{i\in I} D(f_i)$. Dann betrachte $D(f) = \bigcup_{i \in I} D(f_i) \cap D(f) = \bigcup_{i\in I} D(f_i f)$.

Eine endl. Überdeckung $D(f) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} D(f_{i_j} f) = \bigcup_{j=1}^{n} D(f_{i_j}) \cap D(f) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} D(f_{i_j})$

liefert dann eine endl. Teilüberdeckung der $(D(f_i))_{i\in I}$. Sei also oE $D(f) = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$. Dann ist

$$V(f) = \mathrm{Spec}(A) \setminus \bigcup_{i\in I} D(f_i) = \bigcap_{i \in I} V(f_i) \overset{B1(c)}{=} V\Big(\bigcup_{i\in I} \{f_i\}\Big) \overset{B1(a)}{=} V\Big(\sum_{i\in I} (f_i)\Big)$$

Es gilt also für $p \in \mathrm{Spec}(A)$: $f \in p \iff p \supseteq \sum_{i \in I} (f_i)$. Damit folgt

$$r(f) = \bigcap_{\substack{q \in \mathrm{Spec}(A) \\ f \in q}} q = \bigcap_{\substack{q \in \mathrm{Spec}(A) \\ q \supseteq \sum_{i\in I}(f_i)}} q \subseteq \sum_{i\in I} (f_i).$$ Also $f^n \in \sum_{i \in I} (f_i)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Also $f^n = \sum_{i\in I} g_i f_i$ mit $g_i = 0$ f.f.a. $i \in I$. Also ex. ein $J \subseteq I$ endlich, sd. $f^n = \sum_{i \in J} g_i f_i$.

Damit folgt $f^n \in \sum_{i\in J} (f_i)$. Für $p \in \mathrm{Spec}(A)$ mit $p \supseteq \sum_{i \in J} (f_i)$ folgt also $f^n \in p$, da p prim folgt also $f \in p$, also $p \supseteq (f)$ und $p \in V(f)$. Also folgt

$$\mathrm{Spec}(A) \setminus D(f) = V(f) \supseteq V\Big(\sum_{i\in J} (f_i)\Big) \overset{B1(a)}{=} V\Big(\bigcup_{i \in J} \{f_i\}\Big) \overset{\text{analog}}{=} \mathrm{Spec}(A) \setminus \bigcup_{i \in J} D(f_i)$$

Insgesamt also $D(f) \subseteq \bigcup_{i\in J} D(f_i)$.

$\square$

(b) <u>Bew.</u>: Sei $U = \bigcup_{i\in I} D(f_i)$ offen.

„$\Rightarrow$" Sei U quasikompakt. Da $(D(f_i))_{i\in I}$ offene Überd. ex. endl. TM $J \subseteq I$ mit $U \subseteq \bigcup_{j\in J} D(f_j)$. Da $D(f_j) \subseteq U$ folgt $\bigcup_{j\in J} D(f_j) \subseteq U$ also $U = \bigcup_{j\in J} D(f_j)$.

„$\Leftarrow$" Sei $U = \bigcup_{i=1}^{n} D(f_i)$ und $U \subseteq \bigcup_{j\in J} D(g_j)$. Dann ist $\bigcup_{i=1}^{n} D(f_i) \subseteq \bigcup_{j\in J} D(g_j)$. Insbes. ist $D(f_i) \subseteq \bigcup_{j\in J} D(g_j)$. Nach (a) ist $D(f_i)$ quasikompakt, d.h. es ex. $j_{i,1}, \dots, j_{i,m_i}$ sd. $D(f_i) \subseteq \bigcup_{k=1}^{m_i} D(g_{j_{i,k}})$. Dann gilt $U = \bigcup_{i=1}^{n} D(f_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{k=1}^{m_i} D(g_{j_{i,k}})$. Dies ist als Vereinigung n endl. Teilüberdeckungen eine endl. Teilüberdeckung.

$\square$