Algebra Blatt 8 Christian Merten, Zicheu Li

A1	A2	A3	A4	Σ

A1/ $m, n \in \mathbb{N}$, $d, e \mid n$. $i \in \mathbb{N}_0$.

(a) Es ist $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow 0$ eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul. Anwenden von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} -$ liefert

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{1 \otimes m} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Da $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genügt es

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

zu betrachten.

Es folgt $\operatorname{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0 \quad \forall i \geq 2$,

$$\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \ker(\cdot m) \overset{(*)}{=} \left(\frac{n}{ggT(m,n)}\right)^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \Big/ n\mathbb{Z}$$

$$\operatorname{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \big/ m(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \big/ (m+n)\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

(*): $\bar{a} \in \ker(\cdot m) \iff am \in (n) \iff a(m) \in (n) \iff a \in (n):(m) \overset{\text{VL}}{=} \left(\frac{n}{ggT(m,n)}\right)$

(b) Betrachte

$$\dots \longrightarrow \mathbb{Z}/n \xrightarrow{\frac{n}{d}} \mathbb{Z}/n \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}/n \longrightarrow \mathbb{Z}/d \longrightarrow 0$$

Es ist $\bar{a} \in \ker(\cdot d) \iff ad \in (n) \iff a \in \left(\frac{n}{d}\right)$.

Also $\ker(\cdot d) = \frac{n}{d}\mathbb{Z}/n$ und analog $\ker(\cdot \frac{n}{d}) = d\mathbb{Z}/n$

also ist obige Folge exakt und $\mathbb{Z}/n$ proj. als $\mathbb{Z}/n$-Modul.

Tensorieren mit $\mathbb{Z}/e$ liefert

$$\dots \longrightarrow \mathbb{Z}/e \otimes_{\mathbb{Z}/n} \mathbb{Z}/n \xrightarrow{1 \otimes \frac{n}{d}} \mathbb{Z}/e \otimes_{\mathbb{Z}/n} \mathbb{Z}/n \xrightarrow{1 \otimes d} \mathbb{Z}/e \otimes_{\mathbb{Z}/n} \mathbb{Z}/n \longrightarrow 0$$

also vereinfacht $\dots \longrightarrow \mathbb{Z}/e \xrightarrow{\cdot \frac{n}{d}} \mathbb{Z}/e \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}/e \longrightarrow 0$

Für $i \in 2\mathbb{N}-1$: $T_i := \operatorname{Tor}_i^{\mathbb{Z}/n}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/e) = \ker(\cdot d) \big/ \operatorname{im}(\cdot \frac{n}{d})$

$i \in 2\mathbb{N}$: $T_i = \ker(\cdot \frac{n}{d}) \big/ \operatorname{im}(\cdot d)$

$i = 0$: $T_0 \overset{\text{VL}}{=} \mathbb{Z}/n \otimes_{\mathbb{Z}/n} \mathbb{Z}/e$

Es gilt $\bar{a} \in \ker(\cdot d) \iff ad \in (e) \iff a(d) \in (e) \iff a \in (e):(d) = \frac{e}{ggT(d,e)}\mathbb{Z}$

analog $\bar{a} \in \ker(\cdot \frac{n}{d}) \iff a \in \frac{e}{ggT(\frac{n}{d},e)}\mathbb{Z}$

$\operatorname{im}(\cdot d) = d\left(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}\right) = ggT(d,e)/e\mathbb{Z}$ und $\operatorname{im}(\cdot \frac{n}{d}) = ggT(\frac{n}{d},e)/e\mathbb{Z}$

Insgesamt folgt für $i \in 2\mathbb{N}$: $T_i = \dfrac{\frac{e}{ggT(\frac{n}{d},e)}\mathbb{Z}/e}{ggT(d,e)\mathbb{Z}/e}$

$$= \frac{e}{ggT(\frac{n}{d},e)}\mathbb{Z} \Big/ ggT(d,e)$$

$i \in 2\mathbb{N}-1$: $T_i = e/ggT(d,e)\,\mathbb{Z} \Big/ ggT(\frac{n}{d},e)$

A2 (a) Bew.: Als $\mathbb{C}[X,Y]$-Moduln sind $\mathbb{C}[X,Y]$ und $\mathbb{C}[X,Y]^2$ frei, insbes. projektiv. Es bleibt die Exaktheit zu zeigen.

- Es ist $\alpha(f) = (fX, -fY) = 0 \iff fX = 0 = fY$. Als freier Modul ist $\mathbb{C}[X,Y]^2$ torsionsfrei, also folgt $f = 0$. Also α inj.
- Sei $(fX, -fY) \in \operatorname{im} \alpha \Rightarrow \beta(fX, -fY) = YfX - XfY = 0$.
  Für $(f,g) \in \ker \beta \Rightarrow Yf = -Xg$. Also $Yf \in (X)$. Da X irreduzibel in $\mathbb{C}[X,Y]$ folgt $f \in (X)$ also $\exists h \in \mathbb{C}[X,Y]: f = hX$. Dann ist $XYh = Yf = -Xg$. Da $\mathbb{C}[X,Y]$ nullteilerfrei, folgt $Yh = -g$. Damit: $\alpha(h) = (hX, -hY) = (f,g)$. Also $\operatorname{im} \alpha = \ker \beta$.
- Sei $Yf + Xg \in \operatorname{im} \beta$. Dann ist $\varepsilon(Yf + Xg) = 0$. Sei nun $h \in \ker \varepsilon$. Dann $\exists f,g \in \mathbb{C}[X,Y]: h = Yf + Xg$. Also $\ker \varepsilon = \operatorname{im} \beta$.
- ε surjektiv ✓

(b) Betrachte:

$$0 \longrightarrow \underset{\mathbb{C}}{\underset{\cong}{\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}[X,Y]} \mathbb{C}[X,Y]}} \xrightarrow{1 \otimes \alpha} \underset{\mathbb{C}^2}{\underset{\cong}{\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}[X,Y]} \mathbb{C}[X,Y]^2}} \xrightarrow{1 \otimes \beta} \underset{\mathbb{C}}{\underset{\cong}{\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}[X,Y]} \mathbb{C}[X,Y]}} \longrightarrow 0$$

- Es ist $(1 \otimes \alpha)(z \otimes f) = z \otimes \alpha(f) = z \otimes (fX, -fY)$. Unter $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}[X,Y]} \mathbb{C}[X,Y]^2 \cong \mathbb{C}^2$ folgt $z \otimes (fX, -fY) \overset{\sim}{\longmapsto} (z \cdot \underbrace{\varepsilon(fX)}_{=0}, z \cdot \underbrace{\varepsilon(fY)}_{=0}) = 0$
- Für $(1 \otimes \beta)(z \otimes (f,g)) = z \otimes \beta(f,g) = z \otimes (Yf + Xg)$. Wieder folgt unter $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}[X,Y]} \mathbb{C}[X,Y] \cong \mathbb{C}$: $z \otimes (Yf + Xg) \overset{\sim}{\longmapsto} z \cdot \underbrace{\varepsilon(Yf + Xg)}_{=0} = 0$

Also genügt es: $0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{0} \mathbb{C}^2 \xrightarrow{0} \mathbb{C} \longrightarrow 0$ zu betrachten.
Dann sehe $T_i := \operatorname{Tor}_i^{\mathbb{C}[X,Y]}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. $T_i = 0 \quad \forall i \geq 3$.

$T_2 = \mathbb{C}$, $T_1 = \mathbb{C}^2$, $T_0 = \mathbb{C}$.

(c) Nein, denn wäre $0 \to P_1 \to P_0 \to \mathbb{C} \to 0$ proj. Auflösung folgt bereits (in Notation der (b)): $T_2 = 0 \neq \mathbb{C}$.

A3| $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{Z}/n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Beh.: Es ex. unendl. periodische inj. Auflösung

$$0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}/n \to \dots$$

von $\mathbb{Z}/p$ als $\mathbb{Z}/n$ Modul.

Bew.: Betrachte:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/n \arrow[rr, "\pi_p"] \arrow[dr, two heads] & & \mathbb{Z}/n \\
& (\mathbb{Z}/n)/(p\mathbb{Z}/n) \cong \mathbb{Z}/p \cong \frac{n}{p}\mathbb{Z}/n \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/n \arrow[rr, "\pi_{n/p}"] \arrow[dr, two heads] & & \mathbb{Z}/n \\
& (\mathbb{Z}/n)/(\frac{n}{p}\mathbb{Z}/n) \cong \mathbb{Z}/\frac{n}{p} \cong p\mathbb{Z}/n \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

sd. $\operatorname{im} \pi_p = \frac{n}{p}\mathbb{Z}/n = \ker \pi_{n/p}$ und $\operatorname{im} \pi_{n/p} = p\mathbb{Z}/n = \ker \pi_p$

Das liefert eine exakte Folge $\dots \to \mathbb{Z}/n \xrightarrow{\pi_p} \mathbb{Z}/n \xrightarrow{\pi_{n/p}} \mathbb{Z}/n \xrightarrow{\pi_p} \mathbb{Z}/n \to \dots$

Insgesamt folgt mit $\mathbb{Z}/p \cong \frac{n}{p}\mathbb{Z}/n$ also $\operatorname{im}(\mathbb{Z}/p \hookrightarrow \mathbb{Z}/n) = \frac{n}{p}\mathbb{Z}/n$:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p \hookrightarrow \mathbb{Z}/n \xrightarrow{\pi_{n/p}} \mathbb{Z}/n \xrightarrow{\pi_p} \dots$$

exakt. Da $\mathbb{Z}/n$ als $\mathbb{Z}/n$-Modul injektiv, folgt die Beh.

$\square$

A4 (a) $f \in A$ und $\phi : A \xrightarrow{\text{kan}} A_f$. Zz. $\operatorname{Spec}(A_f) \xrightarrow{\phi^*} D(f)$ Homöom.

Bew. Nach VL ist $\phi^* : \operatorname{Spec}(A_f) \longrightarrow \{ p \subseteq A \text{ PI mit } p \cap \{f^n : n \geq 0\} = \emptyset \} = D(f)$ bijektiv. Nach B6 ist ϕ^* aufwärts- stetig. Es g.zz. dass ϕ^* offene Abb. Dafür sei $\frac{g}{f^n} \in A_f$ bel. für ein $n \geq 0$. Dann gilt:

Beh. $\phi^*(D(\frac{g}{f^n})) = D(fg)$

"$\subseteq$" Sei $p \in \phi^*(D(\frac{g}{f^n}))$. Dann ist $p = \phi^{-1}(q)$ für ein $q \in \operatorname{Spec}(A_f)$ mit $\frac{g}{f^n} \notin q$. Da $p \in D(f)$ ist $f \notin p$. Ang. $g \in p = \phi^{-1}(q)$ Dann ist $\frac{g}{1} = \phi(g) \in q$. Da $q = \{f^n : n \geq 0\}^{-1} p$ folgt $\frac{g}{f^n} \in q$ $\lightning$. Also folgt $p \in D(fg)$.

"$\supseteq$" Sei $p \in D(fg)$. Dann ist $f \notin p$ und $g \notin p$. Setze $q := p^e$. Da $p \cap \{f^n : n \geq 0\} = \emptyset$ ist q PI in A_f. Dann ist $\frac{g}{f^n} \notin q = \{f^n : n \geq 0\}^{-1} p$. Also $q \in D(\frac{g}{f^n})$ und $\phi^*(q) = p$, also $p \in \phi^*(D(\frac{g}{f^n}))$.

#

Da $D(gf)$ offen folgt ϕ^* Homö.

$\square$

(b) <u>Beh.</u> $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}) \xrightarrow{\pi^*} V(\mathfrak{a})$ Homöo.

<u>Bew.</u> Nach VL ist

$$\{\text{Ideale in } A/\mathfrak{a}\} \longrightarrow \{\text{Ideale in } A \text{ die } \mathfrak{a} \text{ enthalten}\}$$
$$I \longmapsto \pi^{-1}(I)$$
$$\pi(J) \longleftarrow J$$

inklusionserhaltende Bijektion. Da für $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ auch $\pi^{-1}(\mathfrak{p}) \in \mathrm{Spec}(A)$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \pi^{-1}(\mathfrak{p})$ und für $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{a})$: $\pi(\mathfrak{q}) \in \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$(*), erhalte Bijektion $\pi^*: \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}) \longrightarrow V(\mathfrak{a})$. Nach B6 ist π^* stetig.

Es <u>z.z., dass</u> π^* <u>abgeschl. Abb.</u> Sei also $\mathfrak{b} \subseteq A/\mathfrak{a}$ Ideal. Nach B6 gilt $\overline{\pi^*(V(\mathfrak{b}))} = V(\mathfrak{b}^c)$. Es genügt also $V(\mathfrak{b}^c) \subseteq \overline{\pi^*(V(\mathfrak{b}))}$ zu zeigen. Dann folgt $\pi^*(V(\mathfrak{b}))$ abgeschlossen.

Dazu sei $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b}^c)$ bel. Dann ist $\mathfrak{b}^c = \pi^{-1}(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{p}$ und $0 \in \mathfrak{b}$ also $\mathfrak{a} \subseteq \pi^{-1}(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{p}$. Setze $\mathfrak{q} := \pi(\mathfrak{p}) \subseteq A/\mathfrak{a}$. Nach dem obigen ist $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ und $\pi^{-1}(\pi(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$. Da π^* inklusionserhaltende Bij., folgt aus $\pi^{-1}(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{p} = \pi^{-1}(\mathfrak{q})$, dass $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{q}$, also $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{b})$. Es ist also $\mathfrak{p} = \pi^*(\mathfrak{q}) \in \pi^*(V(\mathfrak{b}))$.

$\square$

(*) Sei $\mathfrak{p}$ PI mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$.
Dann seien $x, y \in A/\mathfrak{a}$ bel. mit $xy \in \pi(\mathfrak{p})$. Da π surj. ex. $a, b \in A$ mit $\pi(a) = x$, $\pi(b) = y$ und $\exists c \in \mathfrak{p}: \pi(c) = xy \Rightarrow (ab - c) = \pi(ab) - \pi(c) = xy - xy = 0$.
Also $ab - c \in \ker \pi$. Da $c \in \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a} = \ker \pi$ folgt $ab \in \ker \pi \subseteq \mathfrak{p}$. Also $a \in \mathfrak{p}$ oder $b \in \mathfrak{p} \Rightarrow x \in \pi(\mathfrak{p})$ oder $y \in \pi(\mathfrak{p})$.