Algebra Zettel 9 Zizhu Li, Christian Merten

A1	A2	A3	A4	A5	Σ

A1 Bew. Sei zunächst E $S^{-1}A$-Modul. Dann gilt wegen $S^{-1}\otimes_A - \dashv f^{\#}$:

$$\mathrm{Hom}_A(S^{-1}A, f^{\#}E) \cong \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(\underbrace{S^{-1}A \otimes_A S^{-1}A}_{\cong S^{-1}A}, E) \cong E$$

Also gilt wegen $S^{-1}\otimes_A - \dashv f^{\#}$ und $f^{\#} \dashv \mathrm{Hom}_A(S^{-1}A, -)$:

$$\mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}f^{\#}M, E) \cong \mathrm{Hom}_A(f^{\#}M, f^{\#}E) \cong \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(M, \mathrm{Hom}_A(S^{-1}A, f^{\#}E))$$
$$\cong \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(M, E)$$

Also liefert Yoneda $S^{-1}f^{\#}M \cong M$ als $S^{-1}A$-Moduln. Nun liefert 16.7

$$S^{-1}\mathrm{Tor}_i^A(f^{\#}M, f^{\#}N) \cong \mathrm{Tor}_i^{S^{-1}A}(S^{-1}f^{\#}M, S^{-1}f^{\#}N) \cong \mathrm{Tor}_i^{S^{-1}A}(M, N)$$

Es genügt nun zu zeigen, dass $f^{\#}S^{-1}\mathrm{Tor}_i^A(f^{\#}M, f^{\#}N) \cong_A \mathrm{Tor}_i^A(f^{\#}M, f^{\#}N)$.

Sei dazu $F = A^{(X)}$ mit X bel. Menge. Dann ist

$$f^{\#}S^{-1}(F \otimes_A f^{\#}N) \cong f^{\#}S^{-1}(f^{\#}N)^{(X)} \cong f^{\#}(S^{-1}f^{\#}N)^{(X)} \cong f^{\#}N^{(X)} \cong (f^{\#}N)^{(X)}$$
$$\cong F \otimes_A f^{\#}N$$

Da $f^{\#}$ und S^{-1} exakt erhalten diese freie Auflösungen und die Beh. folgt analog zu 16.7(i). $\square$

A2 $m,n \in \mathbb{N}$, $d,e \mid n$. $i \in \mathbb{N}_0$

(a) Wie auf Zettel 8 ist

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m \to 0$$

exakt. Betrachte die exakte Folgen

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n) \arrow[r, "(\cdot m)^*"] \arrow[d, "f \mapsto f(1)"', "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"', "f \mapsto f(1)"] & \mathrm{Ext}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}/n) \arrow[r] & \underbrace{\mathrm{Ext}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n)}_{=0} \\ \mathbb{Z}/n \arrow[r, "\cdot m"] & \mathbb{Z}/n \arrow[r] & \mathrm{Ext}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}/n) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

da $\mathbb{Z}$ projektiv

Also folgt $\mathrm{Ext}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}/n) = \mathrm{coker}(\cdot m) = \mathbb{Z}/n \big/ m(\mathbb{Z}/n) = \mathbb{Z}/n \big/ ggT(m,n)/n = \mathbb{Z}/ggT(m,n)$

Außerdem gilt $\mathrm{Ext}_0^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}/n) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}/n)$ und da $\mathbb{Z}$ HIR

$\mathrm{Ext}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}/n) = 0 \quad \forall i \geq 2.$

(b) Wieder analog zu Blatt 8 erhalten wir die exakte Folge:

$$\dots \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}/n \xrightarrow{\cdot \frac{n}{d}} \mathbb{Z}/n \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}/d \to 0$$

also nach Anwenden von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/n}(-, \mathbb{Z}/e)$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/n}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/e) \arrow[r, "(\cdot d)^*"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/n}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/e) \arrow[r, "(\cdot \frac{n}{d})^*"] \arrow[d, "\wr"] & \dots \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/e \arrow[r, "\cdot d"] & \mathbb{Z}/e \arrow[r, "\cdot n/d"] & \dots \end{tikzcd}$$

Setze $E_i := \mathrm{Ext}_i^{\mathbb{Z}/n}(\mathbb{Z}/d, \mathbb{Z}/e)$. Dann folgt $E_0 = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/n}(\mathbb{Z}/d, \mathbb{Z}/e)$.

Für $i \in 2\mathbb{N}-1$: $\quad E_i = \mathrm{ker}(\cdot n/d) \big/ \mathrm{im}(\cdot d)$

$i \in 2\mathbb{N}$: $\quad E_i = \mathrm{ker}(\cdot d) \big/ \mathrm{im}(\cdot \frac{n}{d})$

Ausrechnen passiert analog zu Blatt 8.

(c) Nach 8.8 ist $0 \longrightarrow \mathbb{C}[x,y] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}[x,y]^2 \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}[x,y] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{C} \longrightarrow 0$

proj. Auflösung von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}[x,y]$-Modul. Anwenden von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[x,y]}(-,\mathbb{C})$ liefert

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[x,y]}(\mathbb{C}[x,y],\mathbb{C}) \arrow[r, "\beta^*"] \arrow[d, "f \mapsto f(1)"', "\wr"] & \mathrm{Hom}(\mathbb{C}[x,y]^2,\mathbb{C}) \arrow[r, "\alpha^*"] \arrow[d, "f \mapsto (f(1,0),f(0,1))"', "\wr"] & \mathrm{Hom}(\mathbb{C}[x,y],\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d, "f \mapsto f(1)"', "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r, "0"] & \mathbb{C}^2 \arrow[r, "0"] & \mathbb{C} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$1 \mapsto z \longmapsto$ $(1,0) \mapsto \varepsilon(y)z = 0$, $(0,1) \mapsto \varepsilon(x)z = 0$

$z \longmapsto 0$

$(1,0) \mapsto z$, $(0,1) \mapsto w \longmapsto 1 \mapsto \varepsilon(x)z - \varepsilon(y)w = 0$

$(z,w) \longmapsto 0$

Daraus folgt nun mit $E_i := \mathrm{Ext}_i^{\mathbb{C}[x,y]}(\mathbb{C},\mathbb{C})$. $E_0 \cong \mathbb{C}$ $\quad E_1 \cong \mathbb{C}^2$ $\quad E_2 \cong \mathbb{C}$

A3| (a) Bew. Es g.z.z., dass $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ML erfüllt. Sei dazu $n\in\mathbb{N}$ bel. Dann bildet $A_n \supset \mathrm{im}(d_{n+1,n}) \supset \mathrm{im}(d_{n+2,n}) \supset \dots$ eine fallende Folge, also durch Betrachtung der (endl.) Kardinalitäten eine monoton fallende, nach unten durch 0 beschränkte Folge ganzer Zahlen. Diese wird stationär, also auch die entspr. Mengenfolge. □

(b) Bew. Betrachte die inj. Auflösung ($\mathbb{Q}$ teilbar und $\mathbb{Z}$ HIR)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & p^{n+1}\mathbb{Z} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathbb{Q} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "id"] & \mathbb{Q}/p^{n+1}\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & p^{n}\mathbb{Z} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathbb{Q} \arrow[r, two heads] & \mathbb{Q}/p^{n}\mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & &
\end{tikzcd}$$

also erhalte lange exakte Folge

$$0 \longrightarrow \underbrace{\varprojlim (p^n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}}}_{=0} \hookrightarrow \underbrace{\varprojlim \mathbb{Q}}_{=\mathbb{Q}} \longrightarrow \varprojlim \mathbb{Q}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow \varprojlim{}^1 p^n\mathbb{Z} \longrightarrow \varprojlim{}^1 \mathbb{Q}$$

$$\varprojlim{}^1 p^n\mathbb{Z} \cong \mathrm{coker}\left(\mathbb{Q} \to \varprojlim \mathbb{Q}/p^n\mathbb{Z}\right)$$

Da $p^n\mathbb{Z} \supset p^{n+1}\mathbb{Z} \supset \dots$ folgt $\varprojlim p^n\mathbb{Z} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} p^n\mathbb{Z} = 0$. Analog für $\varprojlim \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$. Außerdem sind die Übergangsabb. $\mathbb{Q} \xrightarrow{id} \mathbb{Q}$ surj. also erfüllt $(\mathbb{Q}, id)_{n\in\mathbb{N}}$ ML also $\varprojlim{}^1 \mathbb{Q} = 0$. Es folgt die exakte Folge

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q} \xhookrightarrow{\iota} \varprojlim \mathbb{Q}/p^n\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \varprojlim{}^1 p^n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Wegen der Exaktheit genügt es z.z., dass ι nicht surjektiv ist. Dazu beachte, dass $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ und damit $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \subseteq \varprojlim \mathbb{Q}/p^n\mathbb{Z}$.

Bette $\mathbb{Q} \xhookrightarrow{kan} \varprojlim \mathbb{Q}/p^n\mathbb{Z}$ als Ringe. Dann kann $\mathbb{Q}$ als Teilring von $\varprojlim \mathbb{Q}/p^n\mathbb{Z}$ betrachtet werden.

Es ist gleichzeitig $\bar{1}$ ein Quadrat in $\mathbb{F}_p$ und $-p+1 < 0$ und $-p+1 \equiv 1 \pmod p$.

Also ist nach B4 A5 $-p+1$ Quadrat in $\mathbb{Z}_p$ also in $\varprojlim \mathbb{Q}/p^n\mathbb{Z}$, aber $-p+1$ kein Quadrat in $\mathbb{Q}$, also ist $\mathbb{Q} \subsetneq \varprojlim \mathbb{Q}/p^n\mathbb{Z}$, insbes. ι nicht surjektiv. □

A4 (a) <u>Bew.</u> Sei ϕ injektiv und $Y \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ abgeschl. mit $\phi^*(\operatorname{Spec}(B)) \subseteq Y$. Dann ist $Y = V(M)$ für $M \subseteq A$ und $\forall q \in \operatorname{Spec}(B)$ ist $\phi^{-1}(q) \in V(M)$, d.h.

$$M \subseteq \bigcap_{q \in \operatorname{Spec}(B)} \phi^{-1}(q) = \phi^{-1}\Big(\bigcap_{q \in \operatorname{Spec}(B)} q\Big) = \phi^{-1}(N_B)$$ mit N_B Nilradikal von B.

Sei nun $x \in M$ bel. dann ist $x \in \phi^{-1}(N)$, also $\phi(x) \in N_B$ Also ex. ein $n \in \mathbb{N}$, sd. $0 = \phi(x)^n = \phi(x^n)$. Da ϕ injektiv folgt $x^n = 0$ also x nilpotent. Da $N_A = \bigcap_{p \in \operatorname{Spec}(A)} p$ und $M \subseteq N_A$ folgt $V(M) = \operatorname{Spec}(A)$. Also $\overline{\phi^*(\operatorname{Spec}(B))} = \operatorname{Spec}(A)$. $\square$

(b) <u>Bew.</u> Da ϕ treuflach ist nach 7.11 jedes PI Urbild eines PI in B, also ϕ^* surjektiv $\square$

A5 (a) <u>Bew.</u> Sei $i \subseteq \mathbb{R}$ endl. TM. Zz $M_i \neq \emptyset$. Wähle für jedes der endl. vielen Elemente in i ein El. in $\mathbb{Q}$ aus, sd. diese paarw. verschieden sind. Das definiert eine injektive Abb. $f: i \to \mathbb{Q}$. Offensichtlich gilt für $i \subseteq j \subseteq k$ und $f: k \to \mathbb{Q}$, dass $\varphi_{ik}(f) = f|_i = (f|_j)|_i = (\varphi_{ij} \circ \varphi_{jk})(f)$. Außerdem ist φ_{ij} surj., da für $f: i \to \mathbb{Q}$ bel. wähle endl. viele paarw. versch. El. in $\mathbb{Q}$ sd. $g: j \to \mathbb{Q}$ inj. mit $g|_i = f$. $\square$

(b) <u>Bew.</u> Ang. $\varprojlim M_i \neq \emptyset$. Dann ex. ein $(f_i)_{i \in I} \in \varprojlim M_i$ sd. $f_j|_i = f_i$ für $i \subseteq j$.

Dann definiere $F: \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto f_{\{x\}}(x)$. Dann gilt nun für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $F(a) = F(b) \Rightarrow f_{\{a\}}(a) = f_{\{b\}}(b)$. Dann ist $f_{\{a\}} = f_{\{a,b\}}|_{\{a\}}$ und $f_{\{b\}} = f_{\{a,b\}}|_{\{b\}}$ also $f_{\{a,b\}}(a) = f_{\{a,b\}}(b)$. Da $f_{\{a,b\}}$ injektiv folgt $a = b$. Also ist F injektiv.
Aber $\mathbb{R}$ ist überabzählbar und $\mathbb{Q}$ abzählbar $\lightning$. $\square$