Funktheo Zettel 1.

Christian Merten

A1

(a) $\cdot\ (-i)^{2021} = (-1)^{2021} i^{2021} = -i^{2021} \underset{2021\equiv 1 \bmod 4}{=} -i$ da $i^n = \begin{cases} i & n \equiv 1 \bmod 4 \\ -1 & n \equiv 2 \bmod 4 \\ -i & n \equiv 3 \bmod 4 \\ 1 & n \equiv 4 \bmod 4 \end{cases}$

$\Rightarrow \operatorname{Re}((-i)^{2021}) = 0$

$\operatorname{Im}((-i)^{2021}) = -1$

$|(-i)^{2021}| = 1$

$-i = \cos(-\pi/2) + i\sin(-\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \arg(-1)^{2021} = -\pi/2$

$\cdot\ -5 \cdot\ \operatorname{Re}(-5) = -5 \quad \operatorname{Im}(-5) = 0 \quad |-5| = |5| = 5 \quad -5 = 5\cdot(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$

$\arg(-5) = \pi$

$\cdot\ -3+3i =: z,\ \operatorname{Re}(z) = -3,\ \operatorname{Im}(z) = 3,\ |z| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$-3+3i = 3\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) = 3\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$\Rightarrow \arg z = \frac{3\pi}{4}$

$\cdot\ z_2 := \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4} i}.\quad |z_2| = \sqrt{2},\quad \arg z_2 = \frac{3\pi}{4},\quad \operatorname{Re}(z_2) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$

$\operatorname{Im}(z_2) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1$

(b) (i) Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\sum z_n$ konvergiere. $s_n := \sum_{i=1}^{n} z_i$. Dann $s_n \xrightarrow{n\to\infty} s$.

$z_{n+1} = s_{n+1} - s_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ NF.

$\square$

(ii) Sei $\sum |z_n|$ konvergent. Dann $s_n := \sum_{i=1}^{n} |z_i| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Also s_n CF. Z.z. $\tilde{s}_n := \sum_{i=1}^{n} z_i$ CF. Dazu sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n,m \geq n_0$:
oE $n \geq m$

$$\left|\tilde{s}_n - \tilde{s}_m\right| = \left|\sum_{i=m+1}^{n} z_i\right| \leq \left|\sum_{i=m+1}^{n} |z_i|\right| = |s_n - s_m| < \varepsilon.$$

$\Rightarrow (\tilde{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CF also $\sum z_i$ konv.

$\square$

A3 (a) $\psi: \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{C}$.

$f \longmapsto f(i)$

$\cdot$ Dann ist ψ surj., da für $f = a + bX$ ist $\psi(f) = a + bi$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

$\cdot\ \psi(1) = 1,\ \psi(f+g) = (f+g)(i) = f(i) + g(i),\ \psi(fg) = (fg)(i) = f(i)\cdot g(i)$

$\Rightarrow \psi$ Ringhom.

$\cdot\ \psi(f) = 0 \Leftrightarrow f(i) = 0 \Leftrightarrow (X-i) \mid f$ in $\mathbb{C}[X] \overset{f\in\mathbb{R}[X]}{\Longleftrightarrow} (X^2+1) \mid f \Leftrightarrow f \in (X^2+1)$

$\Rightarrow \ker \psi = (X^2+1)$

$\Rightarrow$ Beh folgt mit Homsatz. $\square$

(b) $f = \sum_{j=0}^{d} a_j x^j \in \mathbb{R}[x]$

(i) Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = 0$. Betrachte

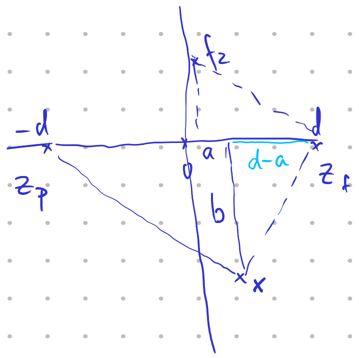
$$0 = \overline{0} = \overline{f(z)} = \overline{\sum_{j=0}^{d} a_j z^j} \underset{\overline{\cdot}\text{-Kp.Hom.}}{=} \sum \overline{a_j}\, \overline{z}^j \underset{a_j \in \mathbb{R}}{=} \sum a_j \overline{z}^j = f(\overline{z})$$

$\square$

(ii) f als Polynom stetig. Außerdem da $\deg f$ ungerade folgt
$f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \pm\infty$ und $f(x) \xrightarrow{x \to \infty} \mp\infty$.

$\overset{\text{ZWS}}{\Rightarrow}$ $\exists x_0 \in \mathbb{R}: f(x_0) = 0$. $\square$

A2 Seien $z_p, z_f \in \mathbb{C}$ die Position der Palme und der Felsbrocken. Dazu sei $x \in \mathbb{C}$ bel. Startpunkt. Durch (evtl. Vertauschen der Rollen von Palme und FB) und geschicktes Legen des Koord.-Systems sei OE $z_p = -d$ und $z_f = +d$ für $d \in \mathbb{R}$ und $\operatorname{Im}(a) < 0$, d.h.



$x = a + bi$

Die Fahnen $f_1, f_2 \in \mathbb{C}$ ergeben sich nun als

$f_2 = +d + b + (d-a)i$

$f_1 = -d - b + (d+a)i$

$$\begin{aligned}\Rightarrow S = f_1 + \tfrac{1}{2}(f_2 - f_1) &= -d - b + (d+a)i + \tfrac{1}{2}(+d + b + di - ai + d + b - di - ai) \\ &= -d - b + di + ai + \tfrac{1}{2}(2b + 2d - 2ai) \\ &= -d - b + di + ai + b + d - ai \\ &= di\end{aligned}$$

Das heißt der Schatz S ist unabhängig von x und liegt auf der Mittelsenkrechten der Strecke zw. Palme und Felsbrocken im Abstand der Hälfte der Strecke.