Funktheo Blatt 9 Christian Merkle, Julia Fila

A1	A2	A3	Σ

A1 (a) Beh. $g \circ f$ konstant $\Leftrightarrow$ f oder g konstant

Bew. „$\Leftarrow$" klar. „$\Rightarrow$": Da $g \circ f$ konstant, folgt für $z \in C$

$0 \overset{(*)}{=} (g \circ f)'(z) = g'(f(z))\, f'(z)$. Da $\mathbb{C}$ nullteilerfrei folgt $g'(f(z)) = 0$ oder $f'(z) = 0$. Falls $\forall z \in C$: $g'(f(z)) = f'(z) = 0$, dann ist f auf C konstant.

Sonst oE $f'(z) \neq 0$. Dann ex. wegen f' stetig ein $\delta > 0$ sd. $f'(w) \neq 0$ $\forall w \in U_\delta(z)$ Dann ist aber wegen $(*)$ $g'(f(w)) = 0$ $\forall w \in U_\delta(z)$

Also g konstant auf dem (nach Gebietssatz) Gebiet $f(U_\delta(z))$. Da $U_\delta(z) \neq \emptyset$ und offen enthält es einen HP und damit nach Identitätssatz g konstant auf D. $\square$

(b) Bew. Da D Sterngebiet hat u harmon. Konjugierte v also $f := u + iv$ holomorph.

Dann ist $\forall z \in D$: $|\exp(f(z))| = |\exp(u(z) + iv(z))| = |\exp(u(z))| \underbrace{|\exp(iv(z))|}_{=1}$

$$= \exp(u(z))$$

$$\overset{\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ monoton wachsend}}{\leq} \exp(u(\xi))$$

Also ist ξ lok. Maximum von $\exp \circ f$ also nach Maxprinzip $\exp \circ f$ konstant.

Da exp nicht konstant folgt mit (a), dass f konstant. Also insbes. $Re(f) = u$ konstant. $\square$

A2 (a) Bew. Nach Potenzreihenentwicklungssatz ex. ein $\delta > 0$ sd $\forall z \in U_\delta(z_0)$

$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^\nu$. Dann ex. wg $g \not\equiv 0$ ein minimales $\nu_0 \geq 0$ sd $a_\nu \neq 0$. Setze $k := \nu_0$.

Dann ist $g(z) = \sum_{\nu=k}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu = (z - z_0)^k \underbrace{\sum_{\nu=0} a_{\nu+k} (z - z_0)^\nu}_{=: \tilde{g}(z)}$. Es ist

$\tilde{g}$ holomorph auf $U_\delta(z_0)$, da konv. Potenzreihe und da $a_k \neq 0$ ist $\tilde{g}(z) \neq 0$.

Zur Eindeutigkeit von k. Sei $\tilde{k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $\tilde{h}$ holomorph auf U-gebung U von z_0 mit $\tilde{k} \neq k$. OE $U_\delta(z_0) \subseteq U$. Dann sei $(z - z_0)^k \tilde{g}(z) = g(z) = (z - z_0)^{\tilde{k}} \tilde{h}(z)$. OE $k > \tilde{k}$.

Es ist $\tilde{g}(z_0) \neq 0$ und $\tilde{g}$ stetig also ex. $\varepsilon > 0$ sd. $U_\varepsilon(z_0) \subseteq U_\delta(z_0)$ und $\tilde{g}(w) \neq 0$ und beschränkt für $w \in U_\varepsilon(z_0)$. Dann ist wegen Stetigkeit von $\tilde{g}, \tilde{h}$:

$(z - z_0)^{k - \tilde{k}} = \dfrac{\tilde{h}(z)}{\tilde{g}(z)}$ und $(z - z_0)^{k - \tilde{k}} \xrightarrow{z \to z_0} 0$ folgt $\tilde{h}(z_0) = 0$ $\lightning$.

(b) Falls f konstant 0, dann ist $\frac{f}{g} \equiv 0$ also jede Singularität hebbar.

Sei f nicht konstant 0. Dann schreibe $f(z) = (z-s)^{k_f} \tilde{f}(z)$ und $g(z) = (z-s)^{k_g} \tilde{g}(z)$ mit $k_f = 0\text{-ord}_s(f)$ und $k_g = 0\text{-ord}_s(g)$ und für z in Umgebung $U_\delta(s)$ für $\delta > 0$. Da $\tilde{f}(s) \neq 0 \neq \tilde{g}(s)$ sei wegen Stetigkeit oE $\tilde{g}(z) \neq 0 \neq \tilde{f}(z)$ für $z \in U_\delta(s)$.

Dann gilt für $z \in \dot{U}_\delta(s)$:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z-s)^{k_f}}{(z-s)^{k_g}} \frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)} = (z-s)^{k_f - k_g} h(z) \text{ mit}$$

$h(z) := \frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}$ holomorph auf $U_\delta(s)$ da $\tilde{g}(z) \neq 0$ für $z \in U_\delta(s)$ und $h(s) \neq 0$ da $\tilde{f}(s) \neq 0$. Also $\frac{f(z)}{g(z)} = (z-s)^{k_f - k_g} h(z)$. Also hat $\frac{f}{g}$ in s genau dann eine Polstelle wenn $k_f - k_g < 0 \iff k_f < k_g$.

Nach Hebbarkeitssatz ist s hebbar $\iff \lim_{z \to s} \frac{f(z)}{g(z)} (z-s) = 0$

$$\iff \lim_{z \to s} (z-s)^{k_f - k_g} (z-s) h(z) = 0 \iff \lim_{z \to s} (z-s)^{k_f - k_g + 1} h(z) = 0$$

$$\overset{h \text{ stetig},\ h(s) \neq 0}{\iff} \lim_{z \to s} (z-s)^{k_f - k_g + 1}$$

$$\iff k_f - k_g + 1 > 0$$

$$\iff k_f > k_g - 1$$

$$\overset{k_f, k_g \in \mathbb{Z}}{\iff} k_f \geq k_g$$

$\Rightarrow$ s Pol $\iff 0\text{-ord}_s(f) < 0\text{-ord}_s(g)$

s hebbar $\iff 0\text{-ord}_s(f) \geq 0\text{-ord}_s(g)$ $\square$

c) Nie, da nach (b) s entweder Pol oder hebbar.

d) <u>Bew.</u> Falls f konstant 0, dann trivial. Sei also $f \not\equiv 0$. Dann ist nach (b) $0\text{-ord}_s(f) \geq 0\text{-ord}_s(g) =: k$. Nach Konstruktion von 0-ord aus (a) folgt für ein $\delta > 0$

$g(z) = (z-s)^k \underbrace{\sum_{\nu=0} a_{\nu+k} (z-s)^\nu}_{=: \tilde{g}(z)}$ mit $a_k \neq 0$, $z \in U_\delta(s)$. Nach Taylor gilt $a_k = \frac{g^{(k)}(s)}{k!}$.

Da $k_f \geq k_g$ schreibe nun $f(z) = (z-s)^k \underbrace{\sum_{\nu=0} b_{\nu+k} (z-s)^\nu}_{=: \tilde{f}(z)}$ oE für $z \in U_\delta(s)$. Nach Taylor gilt erneut $b_k = \frac{f^{(k)}(s)}{k!}$.

Da $\tilde{g}(s) \neq 0$ und da $\tilde{g}$ stetig ist oE $\tilde{g}(z) \neq 0$ für $z \in U_\delta(s)$. Also setze

$\tilde{h}(z) := \frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}$. $\tilde{h}$ ist stetig und $\tilde{h}(s) = \frac{b_k}{a_k} = \frac{f^{(k)}(s)}{g^{(k)}(s)}$. Es folgt

$$\lim_{z\to s} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to s} \frac{(z-z_0)^k}{(z-z_0)^k} \tilde{h}(z) = \lim_{z\to s} \tilde{h}(z) \overset{\tilde{h} \text{ stetig}}{=} \tilde{h}(s) = \frac{f^{(k)}(s)}{g^{(k)}(s)} \overset{f^{(k)}, g^{(k)} \text{ stetig}}{=} \lim_{z\to s} \frac{f^{(k)}(z)}{g^{(k)}(z)}$$

□

A3 (a) (i) $z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$. $e^z - 1 = 0 \iff e^z = 1 \iff z = 2\pi i k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Offensichtlich enthält $\{2\pi i k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ keinen HP (sonst wäre $\exp \equiv 1$ nach Identitätssatz).

Nach 2a) und Taylor ist $0\text{-ord}_{z_0}(f) = \min\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid f^{(k)}(z_0) \neq 0\}$.

Also für $z_0 = 0$: $0\text{-ord}_{z_0}(z \mapsto z) = 1$ und für $z_0 \neq 0$: $0\text{-ord}_{z_0}(z \mapsto z) = 0$.

Für $z_0 = 2\pi i k$ ist $0\text{-ord}_{z_0}(z \mapsto e^z - 1) = 1$ da $(z \mapsto e^z - 1)' = (z \mapsto e^z)$ und $e^z \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$ und $e^{z_0} - 1 = 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}$. Also folgt nach A2 (b): Für $z_0 = 2\pi i k$ gilt:

$k = 0$: hebbar mit l'Hospital: $\lim_{z\to 0} \frac{z}{e^z - 1} = \lim_{z \to 0} \frac{1}{e^z} = 1$.

$k \neq 0$: Pol mit Polstellenordnung $|0\text{-ord}_{z_0}(z \mapsto z) - 0\text{-ord}_{z_0}(z \mapsto e^z - 1)| = 1$

(Formel folgt direkt aus der Konstruktion in 2(b)) □

(ii) $z \mapsto \frac{z\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$. $\sin(\pi z) = 0 \iff z \in \mathbb{Z}$. Diese sind offensichtlich isoliert (sonst $\sin(\pi z) \equiv 0$).

Für $z_0 \in \mathbb{Z}$: $0\text{-ord}_{z_0}(z \mapsto \sin(\pi z)) = 1$ da $\sin' = \cos$ und $\cos(\pi z_0) \neq 0$.

$z_0 = 0$: $0\text{-ord}_{z_0}(z \mapsto z\cos(\pi z)) = 1$ da $(z \mapsto z\cos(\pi z))' = (z \mapsto \cos(\pi z) - z\sin(\pi z)\pi)$ und $\cos(0) \neq 0$.

$z_0 \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$: $0\text{-ord}_{z_0}(z \mapsto z\cos(\pi z)) = 0$ da $z_0\cos(\pi z_0) \neq 0$ da $\mathbb{C}$ nullteilerfrei.

Also analog zu (i) ist $z_0 = 0$ hebbar und $z_0 \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ Pole von Ordnung $1 - 0 = 1$.

$$\lim_{z\to 0} \frac{z\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \overset{\text{Hosp}}{=} \lim_{z\to 0} \frac{\cos(\pi z) - z\sin(\pi z)\pi}{\pi\cos(\pi z)} = \frac{1}{\pi}$$

□

(iii) $z \mapsto z\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ in $z_0 = 0$ offensichtl. isolierte Singularität. Betrachte $z_n = \frac{1}{n}$ und $w_n = \frac{1}{n + in}$ Nullfolgen.

Dann ist $\left|z_n \sin\left(\frac{1}{z_n}\right)\right| = \left|\frac{1}{n}\sin(n)\right| \underset{n \in \mathbb{R}}{\leq} \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ also kein Pol.

und $$|w_n \sin(w_n)| = |w_n| \left|\frac{e^{n+in} - e^{-n-in}}{2i}\right| = \frac{|w_n|}{2}\left|e^n e^{in} - e^{-n}e^{-in}\right| \geq \frac{|w_n|}{2}\left|e^n - e^{-n}\right| \geq \frac{|w_n|}{2} e^n = \frac{1}{2}\frac{e^n}{|n + in|}$$

Es ist $|n + in| = \sqrt{n^2 + n^2} = \sqrt{2}\, n$ und $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} \overset{\text{Hosp}}{=} \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ also

$|w_n \sin(w_n)| \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{e^n}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ also nicht hebbar. □

(b) Da in beiden Fällen $z_0 = 0$ hebbar können $z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$ und $z \mapsto z\cot(\pi z)$ als holo-. Fkt. betrachtet werden. Nach Potenzreihenentwicklungssatz haben die Potenzreihen also mind. Konv.radius 2π bzw. 1. Da Potenzreihen stetig und in $2\pi i$ bzw. 1 Pole vorliegen, also

$\lim\limits_{z \to 2\pi} \left| \frac{z}{e^z - 1} \right| = \infty = \lim\limits_{z \to 1} |z\cot(\pi z)|$ ist der Konvergenzradius maximal 2π bzw. 1.

Also Konv.rad. 2π bzw. 1. $\square$