

Auflösung unbeschränkter Komplexe

Christian Merten

28. März 2022

1 Einleitung

2 Derivierte Kategorien und abgeleitete Funktoren

3 K-injektive und K-projektive Auflösungen

Sei im Folgenden $\mathcal{A}$ eine feste abelsche Kategorie und $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{A})$ die Komplexkategorie mit Komplexhomomorphismen bis auf Homotopie als Abbildungen.

Definition 3.1 (K-injektiv bzw. K-projektiv). Ein Komplex $X^\bullet \in \mathcal{K}$ heißt K-injektiv (bzw. K-projektiv), wenn für alle $S^\bullet \in \mathcal{K}$, der Komplex $\text{Hom}^\bullet(S^\bullet, X^\bullet)$ (bzw. $\text{Hom}^\bullet(X^\bullet, S^\bullet)$) exakt ist.

Bemerkung 3.2. Mit ?? ist $X^\bullet$ genau dann K-injektiv (bzw. K-projektiv), wenn $\forall S^\bullet \in \mathcal{K}$ exakt: $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(S^\bullet[i], X^\bullet) = 0$ (bzw. $\text{Mor}_{\mathcal{K}}(X^\bullet, S^\bullet[i]) = 0$) $\forall i \in \mathbb{Z}$. Da Verschieben Exaktheit erhält folgt also

$$X^\bullet \text{ K-projektiv} \iff \text{Mor}_{\mathcal{K}}(X^\bullet, S^\bullet) = 0 \quad \forall S^\bullet \text{ exakt}$$

$$X^\bullet \text{ K-injektiv} \iff \text{Mor}_{\mathcal{K}}(S^\bullet, X^\bullet) = 0 \quad \forall S^\bullet \text{ exakt.}$$

3.1 Elementare Eigenschaften von K-injektiven und K-projektiven Komplexen

Bemerkung 3.3. Ein exakter K-projektiver oder K-injektiver Komplex $X^\bullet$ ist zusammenziehbar, d.h. ist nullhomotop.

Beweis. Betrachte $\text{id}_{X^\bullet} \in \text{Hom}^0(X^\bullet, X^\bullet) = \text{Mor}_{\mathcal{K}}(X^\bullet, X^\bullet) = H^0 \text{Hom}^\bullet(X^\bullet, X^\bullet) = 0$. Also ist $\text{id}_{X^\bullet} = 0$ und damit $X^\bullet = 0$ in $\mathcal{K}$. $\square$

Satz 3.4. Sei $X^\bullet \in \mathcal{K}$ mit $X^i = 0 \forall i \neq 0$. Dann ist $X^\bullet$ K-injektiv (bzw. K-projektiv) genau dann wenn X^0 injektiv (bzw. projektiv) in $\mathcal{A}$ ist.

Beweis. „ $\implies$ “: Sei $X^\bullet$ K-projektiv und $S^\bullet = 0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ kurze exakte Folge in $\mathcal{A}$. Sei $f: X^0 \rightarrow P$. Das induziert einen Komplexhomomorphismus $X^\bullet \rightarrow S^\bullet$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X^0 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow k & \downarrow f & \nwarrow & \downarrow \\ M & \longrightarrow & N & \xrightarrow{v} & P & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Nach Voraussetzung ist dieser nullhomotop, d.h. es existiert $k: X^0 \rightarrow N$, s.d. $f = vk$. Also ist $\text{Hom}(X^0, N) \rightarrow \text{Hom}(X^0, P)$ surjektiv und damit X^0 projektiv.

„ $\impliedby$ “: Sei nun X^0 projektiv, $S^\bullet \in \mathcal{K}$ exakt und $f: X^\bullet \rightarrow S^\bullet$ Komplexhomomorphismus. Dann betrachte

diag.

Da X^0 projektiv, existiert $k^0: X^0 \rightarrow S^{-1}$, s.d. $f^0 = d^{-1}k^0$. $\square$

Satz 3.5. (i) $X^\bullet \in \mathcal{K}$ ist K-projektiv (bzw. K-injektiv) genau dann wenn $X^\bullet[1]$ dies ist.

(ii) Falls zwei Punkte eines ausgezeichneten Dreiecks in $\mathcal{K}$ K-projektiv (bzw. K-injektiv) sind, dann auch der dritte.

Beweis. (i) Das folgt, daraus dass für $X^\bullet, S^\bullet \in \mathcal{K}$ gilt: $S^\bullet$ exakt $\iff S^\bullet[-1]$ exakt und

$$\text{Mor}_{\mathcal{K}}(X^\bullet, S^\bullet[-1]) = \text{Mor}_{\mathcal{K}}(X^\bullet[1], S^\bullet).$$

- (ii) Sei $(X^\bullet, Y^\bullet, Z^\bullet, u, v, w)$ ein ausgezeichnetes Dreieck mit $X^\bullet, Y^\bullet$ K -projektive und $S^\bullet$ exakt. Nach Anwenden von $\text{Mor}_K(-, S^\bullet)$?? ist dann

$$\underbrace{\text{Mor}_K(X^\bullet[1], S^\bullet)}_{=0} \rightarrow \text{Mor}_K(Z^\bullet, S^\bullet) \rightarrow \underbrace{\text{Mor}_K(Y^\bullet, S^\bullet)}_{=0}$$

exakt und die äußeren Terme 0 nach Voraussetzung und (i). Also folgt $\text{Mor}_K(Z^\bullet, S^\bullet) = 0$, also $Z^\bullet$ K -projektive. Der allgemeine Fall folgt nun mit ??.

□

Satz 3.6. Sei $P^\bullet \in \mathcal{K}$. Dann sind äquivalent

- (i) $P^\bullet$ K -projektive

- (ii) Für $X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ Quasiisomorphismus in $\mathcal{K}$ ist der natürliche Homomorphismus

$$\text{Mor}_K(P^\bullet, X^\bullet) \rightarrow \text{Mor}_K(P^\bullet, Y^\bullet)$$

ein Isomorphismus.

- (iii) Für $S^\bullet \in \mathcal{K}$ ist der natürliche Homomorphismus

$$\text{Mor}_K(P^\bullet, S^\bullet) \rightarrow \text{Mor}_D(P^\bullet, S^\bullet)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. (i) $\implies$ (ii): Sei $f: X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ ein Quasiisomorphismus. Dann ist

$$X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \longrightarrow C_f^\bullet \longrightarrow X^\bullet[1]$$

ein ausgezeichnetes Dreieck und $C_f^\bullet$ ist nach ?? exakt. Anwenden von $\text{Mor}_K(P^\bullet, -)$ liefert mit ?? eine exakte Folge:

$$\underbrace{\text{Mor}_K(P^\bullet, C_f^\bullet[-1])}_{=0} \longrightarrow \text{Mor}_K(P^\bullet, X^\bullet) \longrightarrow \text{Mor}_K(P^\bullet, Y^\bullet) \longrightarrow \underbrace{\text{Mor}_K(P^\bullet, C_f^\bullet)}_{=0}.$$

Die äußeren Terme sind 0, da $P^\bullet$ K -projektive, also folgt der behauptete Isomorphismus.

(ii) $\implies$ (iii): Injektivität: Sei $f: P^\bullet \rightarrow S^\bullet$, s.d. $\text{id}^{-1}f = 0$. Nach ?? existiert ein $t: S^\bullet \rightarrow T^\bullet$ Quasiisomorphismus, s.d. $tf = 0$. Nach (ii) ist $t_*: \text{Mor}_K(P^\bullet, S^\bullet) \rightarrow \text{Mor}_K(P^\bullet, T^\bullet)$ injektiv, also folgt $f = 0$. Surjektivität: Sei $a \in \text{Mor}_D(P^\bullet, S^\bullet)$. Dann ist a ein Diagramm in $\mathcal{K}$

$$\begin{array}{ccc} & M^\bullet & \\ f \nearrow & & \nwarrow s \\ P^\bullet & & S^\bullet \end{array}$$

mit s Quasiisomorphismus. Nach (ii) ist $s_*: \text{Mor}_K(P^\bullet, S^\bullet) \rightarrow \text{Mor}_K(P^\bullet, M^\bullet)$ surjektiv, also existiert ein $g: P^\bullet \rightarrow S^\bullet$, s.d. $sg = f$. Also kommutiert

$$\begin{array}{ccccc} & & S^\bullet & & \\ & g \nearrow & \downarrow s & \nwarrow \text{id} & \\ P^\bullet & & M^\bullet & \xleftarrow{s} & S^\bullet \\ & f \searrow & \uparrow \text{id} & \swarrow s & \\ & & M^\bullet & & \end{array}.$$

Damit folgt $a = g\text{id}^{-1}$.

- (iii) $\implies$ (i): Sei $S^\bullet$ exakt. Dann ist $S^\bullet \rightarrow 0$ ein Quasiisomorphismus, also $S^\bullet \cong 0$ in $\mathcal{D}$, also

$$\text{Mor}_K(X^\bullet, S^\bullet) \stackrel{(ii)}{=} \text{Mor}_D(X^\bullet, S^\bullet) = \text{Mor}_D(X^\bullet, 0^\bullet) = 0.$$

□

Satz 3.7. Sei $X^\bullet \in \mathcal{K}$. Dann sind äquivalent

- (i) $X^\bullet$ K -projektive.
- (ii) Für alle Diagramme in $\mathcal{K}$

$$\begin{array}{ccc} & M^\bullet & \\ & \downarrow s & \\ X^\bullet & \xrightarrow{f} & N^\bullet \end{array}$$

mit s Quasiisomorphismus, existiert genau ein $g: X^\bullet \rightarrow M^\bullet$, s.d. $sg = f$ in $\mathcal{K}$.

- (iii) Für alle Quasiisomorphismen $u: S^\bullet \rightarrow X^\bullet$ in $\mathcal{K}$ existiert ein $v: A^\bullet \rightarrow S^\bullet$, s.d. $uv = \text{id}_{X^\bullet}$ in $\mathcal{K}$.

4 Adjunktion von abgeleitetem Hom und Tensorprodukt